Piano Lauree Scientifiche Piemonte 2013,
in collaborazione con il GeoGebra Institute of Torino
e il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino

Pierangela Accomazzo, Silvia Beltramino, Ada Sargenti

ESPLORAZIONI MATEMATICHE CON GEOGEBRA

A cura di:
Ornella Robutti

Ledizioni

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy
www.ledizioni.it
info@ledizioni.it

Pierangela Accomazzo, Silvia Beltramino, Ada Sargenti
ESPLORAZIONI MATEMATICHE CON GEOGEBRA
A cura di: Ornella Robutti, Ledizioni 2013
ISBN 978-88-6705-120-5

Immagine in copertina: Elaborazione ottenuta con il software geogebra

Informazioni sul catalogo e sulle ristampe dell'editore: www.ledizioni.it

PRESENTAZIONE

GeoGebra nell'insegnamento della matematica

Ornella Robutti, *Dipartimento Matematica Università di Torino*
Responsabile del GeoGebra Institute di Torino

1. Il software GeoGebra

GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/) è un software di geometria dinamica con cui gli studenti possono costruire figure attraverso l'uso di comandi che permettono di collocare oggetti geometrici (punti, rette, segmenti, poligoni, cerchi, ecc.) su un piano. La caratteristica peculiare di GeoGebra, analoga a quella degli altri software di geometria dinamica diffusi in precedenza (Cabri-Géomètre in area europea, The GeometerSketchpad in area nord-americana), è la dinamicità. Le figure costruite possono infatti essere manipolate dinamicamente, non solo trascinate nel piano, ma anche modificate (nel senso di allargate, ristrette e quant'altro), mantenendone però invariato il protocollo di costruzione. Ovvero, se si è costruito un quadrato, pur modificandolo si vedrà sempre un quadrato, seppur girato o ingrandito, che mantiene le stesse proprietà con cui è stato costruito.

GeoGebra però si colloca su un piano diverso rispetto agli altri software menzionati, in quanto è gratuito: infatti è un software open-source che si sta diffondendo sempre di più oggigiorno nel mondo. Si tratta di una di quelle *infrastrutture rappresentazionali* (Hegedus & Moreno-Armella, 2009), che si diffondono a macchia d'olio nelle scuole di ogni livello e di ogni Paese, nei centri di formazione per insegnanti, nelle Università, nei centri di ricerca, nei progetti internazionali di ricerca didattica, per la loro facilità d'uso, il loro libero accesso (e modifica e implementazione), diventando in pochi anni pervasivi nel mondo dell'educazione. Certamente non lo si deve solo alle caratteristiche d'uso (*affordances*, secondo Hegedus & Moreno-Armella, 2009) finalizzate all'utente, ma anche al fatto che il terreno preparato in tanti anni dalla diffusione dei software proprietari (Cabri, Sketchpad) sopra citati ha determinato un'accoglienza unanime da parte del mondo della scuola e dell'Università. C'è da menzionare anche il fatto che GeoGebra cerca di andare oltre, nelle *affordances*, rispetto ai software che lo hanno preceduto. Infatti, consente non solo la costruzione e la manipolazione di figure geometriche nel piano euclideo e in quello cartesiano, ma anche una buona gestione simbolica degli oggetti geometrici e l'integrazione con l'ambiente numerico (simile a quello di un foglio elettronico). Per finire, i file costruiti in GeoGebra possono essere caricati sul web come applet dinamici interattivi e consentire alla comunità di utilizzarli e manipolarli pur senza aprire GeoGebra.

In pochi anni, da quando fu creato dal suo ideatore, uno studente austriaco, Markus Hohenwarter, che faceva la sua tesi di laurea, GeoGebra si è diffuso in tutto il mondo e oggi può vantare la traduzione in decine e decine di lingue diverse e un uso su tutti i continenti, a qualunque livello scolare (Hohenwarter et al., 2009).

Mi piace paragonare GeoGebra all'enciclopedia libera Wikipedia (avviata nel 2001 da Jimmy Wales) e fare alcune osservazioni sull'affidabilità di questa enciclopedia libera, gratuita, scritta e revisionata dalla comunità mondiale di utenti e navigatori del web. Quando qualcuno ha messo in dubbio in passato l'affidabilità di Wikipedia rispetto alla ben nota affidabilità dell'Enciclopedia Britannica (fondata nel 1768), storico e plurisecolare riferimento del sapere accademico, la rivista Nature ha contrapposto uno studio quantitativo volto ad analizzare gli errori presenti nelle due, a parità di voci. I risultati sono stati sorprendenti, e hanno rivelato che il livello di accuratezza ed esattezza dei contenuti di Wikipedia è paragonabile a quello della Britannica, cui è inferiore più che altro in termini di correttezza e coerenza stilistica e strutturale. Questo studio comparativo ha rafforzato l'idea di base di Wikipedia e, più in generale, il principio cardine che la libertà e la cooperazione in rete non generano caos, ma una forza culturale e creatrice nuova e tipica delle comunità di pratica che si stabiliscono spontaneamente (Wenger, 1998).

Il processo di costruzione e verifica collettiva della conoscenza rende l'avventura di Wikipedia molto simile a quella GeoGebra, il software che si avvale, dopo la sua nascita, della competenza di ricercatori e programmatori di tutto il mondo per evolvere e fornire non solo sempre nuove possibilità di uso agli utenti, ma anche nuove implementazioni su supporti diversi. Per esempio, da semplice software di geometria dinamica, oggi GeoGebra si è esteso per incorporare foglio di calcolo, strumento di manipolazione simbolico, visualizzazioni simultanee di diversi ambienti. Inoltre, si sta estendendo il suo uso, che non è solo più accessibile come download su computer, e ovviamente utilizzabile sulla LIM, ma anche di uso on-line, o come applicazione su tablet.

2. GeoGebra nella ricerca e nell'insegnamento della matematica

Iniziata una ventina di anni fa, la ricerca internazionale in didattica della matematica con i software di geometria dinamica, oggi continua includendo anche GeoGebra, ed utilizzando filoni già consolidati e altri più nuovi. Possiamo identificare alcune grandi linee di ricerca didattica che toccano la matematica (anche se i software di geometria dinamica vengono utilizzati non solo in matematica, ma in fisica, nelle scienze sperimentali, in economia, in geografia, …). Tali linee di ricerca che qui presento sono identificate sulla base delle *affordances* che i software presentano:

- la dinamicità, ottenuta tramite la funzione di trascinamento (*dragging*);
- la misura (di lunghezze di segmenti, di ampiezze di angoli, di aree di figure, …);
- la traccia, il luogo, l'animazione (che consentono di vedere l'evoluzione di modelli);
- la rappresentazione di funzioni e l'indagine del loro grafico, a livello locale o globale;
- l'integrazione di registri di rappresentazione diversi (come quello geometrico e quello analitico), che consente di modellizzare situazioni problematiche.

L'oggetto matematico che gli studenti utilizzano in un software di geometria dinamica può essere da loro visto in due modi diversi: come semplice figura (ossia facendo leva sugli aspetti percettivi di osservazione) oppure come figura legata a una teoria (cioè facendo leva sugli aspetti concettuali). Questa base teorica, formulata nell'ambito della psicologia da Fishbein (1993), ha permeato la ricerca sull'apprendimento della matematica, con e senza software (Laborde, 2004). Con il software si fa anche più pressante l'attenzione sugli studenti, in quanto la loro tentazione a fermarsi ai soli aspetti percettivi della figura è forte, perché il software offre non solo il disegno, ma anche una molteplicità di disegni ottenibili con il trascinamento. Se vogliamo quindi far passare il pensiero teorico, avviando alla dimostrazione (che è la base della struttura teorica della matematica), occorre agire nell'insegnamento con grande attenzione e sensibilità didattica (Marrades & Gutierrez, 2000; Olivero, Paola, & Robutti, 2001).

Questi risultati di ricerca didattica sono stati fondamentali per dare indicazioni sull'insegnamento della matematica con i software di geometria dinamica come GeoGebra. Naturalmente è stato necessario riflettere sulla necessità di un cambiamento nell'insegnamento della matematica, che si presenta essenzialmente come metodologico. I risultati di ricerca confermano questa necessità e garantiscono efficacia sia nei processi di insegnamento, sia in quelli di apprendimento (Noss et al., 1997; Laborde et al., 2006). Tale cambiamento si realizza non già proponendo con l'uso del software problemi e attività in forma tradizionale, bensì formulando i compiti in modo del tutto nuovo.

A seconda del tipo di problema, si possono identificare nei risultati di ricerca queste proposte di cambiamento:

- problema di costruzione: classico problema di geometria risalente agli antichi greci, che consiste nel costruire figure geometriche utilizzando riga e compasso, quindi basando la costruzione su proprietà e assiomi della geometria euclidea. Un software come GeoGebra può essere utilizzato in sostituzione della riga e del compasso, purché gli studenti siano consapevoli che non è sufficiente ottenere la figura richiesta, ma che questa figura, una volta trascinata (e qui entra in gioco il *dragging*), mantenga le stesse caratteristiche (cioè, per esempio, un quadrato continui ad essere un quadrato e non diventi un quadrilatero qualunque) (Olivero, Paola & Robutti, 2011). Tale problema di costruzione può essere seguito dalla richiesta di spiegare perché la costruzione è stata fatta in un certo modo, e quindi giustificarla utilizzando la teoria (si entra qui nel mondo della dimostrazione). Esempio di problema di costruzione può essere il seguente: "Costruire la circonferenza che passa per il punto P ed è tangente alla retta l nel punto Q. Spiegare perché la figura ottenuta è proprio la circonferenza richiesta".
- Problema di esplorazione: può essere il classico problema di dimostrazione, in cui però non viene richiesto un compito del tipo "dimostra che…", di fronte a cui la maggior parte di studenti pensa che sia necessario un lampo di genio per riuscire a trovare la dimostrazione e così rimane bloccata (Arzarello et al., 2002; Olivero & Robutti, 2007). Ma si tratta di un problema formulato in modo aperto, che lascia la possibilità di esplorare una situazione geometrica, di formulare una congettura, di validarla e quindi di dimostrarla, una volta convenuto che non è sufficiente vedere con il software che una certa tesi funziona, ma che bisogna giustificarla nel sistema teorico. La potenzialità dei problemi aperti è che essi favoriscono una vasta produzione matematica, nel senso che tutti gli studenti riescono a trovare soluzioni, più o meno complesse, relative alla situazione che stanno esplorando. Il ruolo della dimostrazione è poi quello di precisare come le proprietà scoperte, formulate mediante le congetture prodotte, possano essere dedotte dagli assiomi della teoria considerata, in questo caso la geometria euclidea.
- Problema di modellizzazione: quello in cui si chiede di determinare il massimo o il minimo di una certa grandezza, oppure di studiare come varia una grandezza in funzione di un'altra (Arzarello, Ferrara & Robutti, 2012). Anche qui, come nei precedenti tipi di problemi, occorre una rivisitazione del tipo di problema nella sua forma tradizionale, in quanto, anziché buttarsi sui conti, gli studenti possono visualizzare la situazione tramite una sua rappresentazione grafica, integrata magari da rappresentazioni numeriche (tabelle numeriche di dati), o simboliche (formule).

3. L'attività del GeoGebra Institute di Torino

Nel luglio 2010 è stato fondato a Torino l'Istituto Italiano di GeoGebra (primo in Italia: http://institute.geogebra.org.unito/it/, Robutti, 2013), ospitato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino (www.dm.unito.it) ed operante in collaborazione con l'associazione La Casa degli Insegnanti (http://www.lacasadegliinsegnanti.it/PORTALE/).

L'Istituto di Torino condivide con l'International GeoGebra Institute (http://www.geogebra.org/igi/) le seguenti finalità (Robutti & Sargenti, 2012):

1. *Formazione e supporto*: coordinare e fornire opportunità di sviluppo professionale sia nella formazione iniziale, sia in quella in servizio dei docenti;
2. *Sviluppo e condivisione*: sviluppare e condividere le risorse di seminari e materiali didattici, incrementare ed estendere continuamente il software matematico dinamico GeoGebra;
3. *Ricerca e collaborazione*: condurre e sostenere ricerche relative aGeoGebra con l'attenzione all'insegnamento e all'apprendimento della matematica, informare ed incrementare le attività di formazione e sviluppo, promuovere la collaborazione tra l'IGI e gli Istituti locali di GeoGebra, ed infine tra colleghi di diversi Paesi.

Il GeoGebra Institute di Torino può rilasciare agli insegnanti certificazioni secondo tre livelli: *utenti, esperti, formatori,* in base ai parametri fissati dall'IGI.

Il GeoGebra Institute di Torino, per la condivisione e la diffusione di informazioni e materiali, utilizza, oltre agli spazi ufficiali di GeoGebra, anche i seguenti:

- la piattaforma DI.FI.MA. in rete (DIdattica della FIsica e della MAtematica: http://difima.i-learn.unito.it/);
- la piattaforma de La Casa degli Insegnanti per i docenti che partecipano ai progetti di formazione e sperimentazione (http://lacasadegliinsegnanti.wizshelf.org/).

Inoltre collabora con:

- l'Istituto di GeoGebra Internazionale di Linz per la ricerca didattica;
- la Provincia di Torino per la formazione insegnanti;
- il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino per la gestione della piattaforma DI.FI.MA. in rete;
- varie scuole del territorio piemontese per la sperimentazione di attività.

L'attività dell'Istituto di GeoGebra di Torino si colloca in continuità con le esperienze passate di formazione docenti in matematica (e in fisica):

- dal 2003 il Convegno DI.FI.MA. (organizzato in tutte le sue 5 edizioni con il sostegno della Provincia di Torino);
- dal 2008 la piattaforma DI.FI.MA. in rete e tutte le sue iniziative di seminari, incontri e produzione di materiali (al momento ha raggiunto circa 1500 iscritti);
- dal 2010 i corsi di formazione dei docenti di matematica (Progetto "Comunità di pratica GeoGebra", a cura della Casa degli Insegnanti con il CESEDI).

4. Questo volume

Questo volume nasce come realizzazione di un progetto di formazione insegnanti con l'utilizzo di GeoGebra, nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche di Matematica coordinato dalla sottoscritta nell'anno 2012-13. Abbiamo attivato sul territorio piemontese alcuni interventi di formazione insegnanti che prevedevano non solo attività in presenza con i formatori, ma sperimentazione nelle classi e osservazione della sperimentazione. Parte integrante del piano era il lavoro a distanza in comunità, tramite piattaforma Moodle DI.FI.MA. in rete. Il contenuto di questo volume è centrato sull'approccio laboratoriale alla matematica, in particolare alla geometria, con l'utilizzo di GeoGebra.

Ma il volume è il risultato di un'esperienza più che ventennale di lavori di ricerca e di didattica del gruppo di ricercatori e insegnanti che operano a Torino. Si colloca quindi nella tradizione di insegnamento prima di tutto della matematica, quindi della matematica con le tecnologie (quelle che si mostrano essere efficaci nella mediazione dell'apprendimento dei concetti, della costruzione dei significati, del supporto fornito nella congettura e nell'argomentazione).

Nel volume dunque convergono competenze degli autori ma anche dei docenti impegnati a seguire i corsi, a sperimentare, a osservare gli studenti mentre affrontano le attività.

Per questo si può dire che il volume non è solo il frutto dell'esperienza nei corsi di formazione dei docenti attivati nell'ambito del progetto Lauree Scientifiche che ha operato in sinergia con l'Istituto di GeoGebra, ma di tutte le competenze acquisite nel tempo con i progetti UMI La matematica per il cittadino, o il piano M@t.abel, il piano PON, i convegni DI.FI.MA., i corsi de La Casa degli Insegnanti, i precedenti progetti Lauree Scientifiche, il progetto SeT nazionale, le esperienze maturate con l'INVALSI.

INTRODUZIONE

Esplorazioni matematiche con GeoGebra

Pierangela Accomazzo[2,3], *Silvia Beltramino*[3,4], *Ada Sargenti*[1,2]

"...Quando i teoremi sono difficili, bisognerebbe insegnarli inizialmente come esercizi di disegno geometrico, finché la figura è divenuta del tutto familiare; allora sarà un passo avanti piacevole apprendere i legami logici tra le varie linee o i vari circoli. È anche desiderabile che la figura illustrante un teorema venga disegnata in tutti i casi e in tutte le forme possibili, di modo che le relazioni astratte di cui la geometria si occupa possano venire in luce da se stesse, come portato logico delle somiglianze esistenti tra situazioni apparentemente tanto diverse. Le dimostrazioni astratte dovrebbero rappresentare dunque soltanto una piccola parte dell'istruzione, e dovrebbero essere date quando, attraverso la familiarità acquisita con gli esempi concreti, esse possono essere accolte come generalizzazioni naturali di fatti visibili …"

Bertrand Russel, "Misticismo e logica", Londra 1917

I paragrafi che seguono hanno lo scopo di illustrare finalità e metodologie dei materiali presentati nel testo, inquadrandoli nel contempo nelle Indicazioni nazionali e nelle Linee guida ministeriali, nelle proposte UMI-CIIM e in altri progetti quali m@t.abel.

Si vogliono anche segnalare quegli aspetti del software che la ricerca didattica, nazionale ed internazionale, hanno individuato come valore aggiunto nella didattica della matematica.

1. I materiali

I materiali presentati provengono in buona dai progetti *Lauree scientifiche* e *Comunità di pratica con il software GeoGebra*[5].

Il progetto *Lauree scientifiche* si è infatti articolato in due moduli di *Geometria*, in cui le attività sono state svolte con GeoGebra, ed altri tre moduli, *Modelli*, in cui è stato utilizzato anche questo software. Alla fase di formazione dei docenti, in presenza e tramite piattaforma DI.FI.MA., è seguita la sperimentazione con le classi.

Il progetto *Comunità di pratica con il software GeoGebra* ha unito, alla formazione sul software, una riflessione forte sulle ricadute che comporta la sua introduzione nella didattica della matematica. La comunità è stata creata attraverso una piattaforma Moodle di e-learning che è stata utilizzata tra un incontro e l'altro per il dialogo tra corsisti e formatori e tra cor-

---

[1] GeoGebra Institute di Torino

[2] La Casa degli Insegnanti

[3] m@t.abel

[4] Liceo Scientifico Curie di Pinerolo

[5] Progetto che dall'a.s. 2010-11 è stato inserito nel catalogo CE.SE.DI. (CEntro SErvizi DIdattici) della Provincia di Torino (*http://www.provincia.torino.gov.it/istruzione/cesedi*) che lo ha sovvenzionato. La realizzazione del progetto è avvenuta attraverso l'Associazione La Casa degli Insegnanti (*www.lacasadegliinsegnanti.it*), che è partner del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino nel GeoGebra Institute di Torino.

sisti stessi. Su di essa questi ultimi hanno trovato i materiali dei corsi e hanno depositato le esercitazioni assegnate dai docenti; al termine dei corsi gli iscritti si sono serviti della piattaforma come veicolo di comunicazione con i tutor per progettare la sperimentazione da fare in classe.

Le attività proposte nel seguito, rivolte prevalentemente a classi di scuola secondaria di I e II grado, sono in parte esempi di applicazioni didattiche che i formatori dei vari corsi hanno svolto durante gli incontri; in parte invece sono state ispirate da quanto prodotto dai corsisti stessi, con le sperimentazioni nelle loro classi. Sperimentazioni che sono state guidate dai tutor che successivamente hanno assistito a lezioni. I docenti che hanno concluso questo percorso (formazione-sperimentazione assistita) hanno poi ricevuto la certificazione internazionale di Utente GeoGebra.

L'obiettivo di questa raccolta è quello di suggerire un uso del software GeoGebra che sia funzionale ad un apprendimento sensato della Matematica e spendibile nella didattica quotidiana. I materiali sono stati selezionati in base alla loro validità e ricchezza didattica e sono articolati in modo da costruire un percorso tematico. I nodi di questo percorso sono nodi concettuali centrali nell'apprendimento della Matematica. Il percorso che ne deriva non è lineare: uno stesso tema a volte è ripreso in capitoli diversi, affrontato da punti di vista alternativi e a differenti livelli di approfondimento. Sarà quindi il docente a dover riorganizzare i materiali che vuole utilizzare in un percorso coerente all'interno della propria progettazione didattica.

Inoltre specifiche indicazioni tecniche sul software sono state introdotte al solo scopo di rendere leggibili e riproducibili le proposte di lavoro. Ne consegue che questo testo non può essere considerato un manuale di GeoGebra nel senso classico del termine; per questo si rimanda ad esempio al manuale che si trova sul sito di GeoGebra (*http://www.geogebra.org/book/intro-it.zip*) .

Nell'operare le scelte dei materiali abbiamo dovuto necessariamente fare opportune selezioni, non solo in base alla qualità del materiale, ma anche rispetto ai temi trattati, limitandoci ad alcuni esempi su ciascun nodo. Quindi questo testo non esaurisce i temi fondamentali e non comprende tutte le proposte realizzate in questi anni, ancorché valide.

Si è ritenuto opportuno raggruppare per livelli scolari l'elevato numero di proposte: questo primo volume raggruppa quindi in prevalenza argomenti della scuola dell'obbligo e del primo biennio della scuola secondaria di II grado. È previsto un secondo volume in cui saranno approfonditi temi più specifici per le classi successive.

I grossi raggruppamenti individuati per i nodi riguardano:

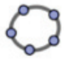
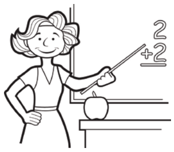
1. La geometria sintetica
2. La geometria analitica
3. Relazioni e funzioni

Ciascun tema è stato sviluppato in uno o più capitoli. I temi *Congetture e argomentazioni* e *Problemi e modelli* sono trattati trasversalmente.

Ciascun capitolo inizia con una sintesi degli argomenti in esso trattati (matematici e di GeoGebra); per gli aspetti matematici vengono richiamati gli agganci con le Indicazioni ministeriali; vengono date tracce per l'inserimento delle attività nel curriculum senza tralasciare la ricaduta sulle competenze.

Ciascuna proposta è corredata da materiali per l'uso didattico: schede (per il docente e per lo studente), protocollo di costruzione GeoGebra che consente di ricostruire il file, brevi istruzioni per l'uso di comandi del software, videate della realizzazione software, indicazioni metodologiche.

Le indicazioni e le schede sono accompagnate da icone che consentono una loro rapida individuazione come da legenda seguente:

	Richiamo alle indicazioni ministeriali
	Indicazioni sull'uso di GeoGebra
	Scheda per il docente

Scheda per lo studente:

	Da svolgere con carta e penna
	Prevede manipolazioni
	Da svolgere con il software

Al fondo del testo sono state inserite:

- una bibliografia-sitografia, per approfondimenti sia riguardanti gli aspetti della ricerca didattica matematica, sia per quanto concerne l'uso delle tecnologie nella didattica, sia per la normativa ed i progetti ministeriali;
- un indice dei temi matematici trattati, con l'indicazione delle attività in cui compaiono;
- un indice specifico di GeoGebra, con l'indicazione delle attività in cui sono utilizzati alcuni comandi particolari e le parti dove questi vengono spiegati.

2. Il software GeoGebra nella didattica della matematica

In principio era Cabri… molti ricorderanno la rivoluzione introdotta nelle aule da questo software di geometria dinamica. Gli oggetti della geometria sintetica perdevano la staticità dei disegni con carta e matita e diventavano qualcosa di vivo da costruire con attenzione alle relazioni intrinseche, da manipolare ed esplorare. Gli insegnanti, dal canto loro, dovevano fare i conti con nuovi e potenti strumenti di mediazione (calcolatrici numerico – grafiche, foglio elettronico, software di geometria dinamica) in grado, se adeguatamente introdotti nella prassi didattica, di far evolvere in modo significativo l'esperienza degli studenti nella costruzione sensata di concetti matematici e di dare nuovo vigore alla metodologia laboratoriale.

L'avvento di GeoGebra ha dato un ulteriore impulso a questa rivoluzione nell'insegnamento – apprendimento della Matematica. La sua gratuità e versatilità d'uso hanno fatto sì che diventasse in breve il più comune software didattico utilizzato nelle scuole. Ne è la prova il numero crescente di materiali, proposte, applicazioni che la comunità di utenti e degli sviluppatori di GeoGebra scambia quotidianamente in rete, in una banca di dati ed informazioni a cui chiunque può attingere.

La struttura stessa del software ha avuto nel tempo una notevole evoluzione. Se all'inizio i suoi registri prevalenti erano quelli della geometria sintetica e della geometria analitica nel tempo le potenzialità di lavoro si sono arricchite con il registro numerico di un foglio elettronico e, ultimamente, con il registro simbolico dell'ambiente CAS.

Il software che l'insegnante ha oggi a disposizione permette quindi di affrontare un problema sotto diversi punti di vista: grafico, numerico e simbolico. L'integrazione tra gli ambienti e la gestione delle variabili che in uno stesso documento possono essere passate da un ambiente all'altro danno significato a un oggetto matematico attraverso rappresentazioni di tipo diverso.

Si può disegnare una retta per due punti del piano cartesiano, ma lo stesso grafico può essere immesso attraverso un'equazione; inoltre le coordinate di un punto variabile sulla retta possono essere registrate su un foglio di calcolo. Volendo trovare l'intersezione fra due rette del piano cartesiano si può ricorrere all'ambiente grafico cercando le coordinate del punto sul piano, all'ambiente numerico individuando sul foglio elettronico quali punti delle due rette hanno le stesse coordinate o all'ambiente simbolico chiedendo al CAS di risolvere il sistema lineare delle equazioni delle due rette.

E non va sottovalutato il più rilevante aspetto di ogni software di geometria dinamica: la possibilità di costruire una figura manipolabile dinamicamente con il *dragging*, e l'immediata verifica percettiva della stabilità della forma e quindi della correttezza della costruzione; la visualizzazione di invarianti nelle relazioni geometriche attraverso lo strumento *Traccia*.

Uno strumento didattico così potente impone all'insegnante una ridefinizione delle situazioni problematiche da proporre agli allievi e delle modalità di lavoro in classe. I problemi devono essere aperti: devono dare spunto all'esplorazione, alla ricerca, alla congettura. Nell'osservare il lavoro dei ragazzi l'insegnante deve fare attenzione ai segni che denotano i processi che gli allievi mettono in atto; deve costruire il collegamento fra l'esperienza percettiva e l'aspetto teorico, fra l'esplorazione, l'argomentazione e la dimostrazione, fra il procedere a caso e l'agire razionalmente.

La ricerca didattica degli ultimi decenni ha molto indagato sulle potenzialità dei software come GeoGebra nell'apprendimento della Matematica, soffermandosi in particolare sugli aspetti cognitivi legati alla dinamicità e alle multiple rappresentazioni degli oggetti. Nella Presentazione di questo volume si dà ampio conto degli studi in proposito, con un'attenzione particolare al *dragging* e alle sue conseguenze oltre che all'integrazione di registri di rappresentazione diversi nella modellizzazione di situazioni problematiche. Emerge in modo significativo che il cambiamento metodologico prodotto dall'uso di software come GeoGebra è efficace sia nei processi di apprendimento che in quelli di insegnamento per non parlare dell'atteggiamento degli studenti nei confronti della disciplina. Ma anche l'insegnante attento potrà valutare l'efficacia di una metodologia laboratoriale che cambia l'approccio degli studenti nei confronti degli oggetti matematici. Basta osservare le reazioni ed i processi messi in atto dagli studenti

- nella costruzione di oggetti geometrici, in cui il software sostituisce riga e compasso. Una figura non può essere costruita *ad occhio*, ma deve passare il test del *trascinamento*, mantenendo nel *dragging* le caratteristiche proprie della sua categoria. Lo studente alterna modalità di lavoro più legate agli aspetti percettivi dell'osservazione a modalità connesse con gli aspetti concettuali della teoria;

- nella modellizzazione e nell'esplorazione di una situazione problematica: il *dragging* permette di prendere in considerazione non la sola figura costruita su carta e matita, ma un buon numero di figure modello di una certa situazione ottenute variando uno o più parametri. Al movimento della mano sul mouse (o meglio ancora della mano su una LIM o uno schermo touch screen) corrisponde una particolare raffigurazione della situazione problematica; inoltre la considerazione simultanea di modelli diversi (numerico, grafico, simbolico) mette in atto strategie multimodali che sono in sintonia con le modalità di azione del vivere quotidiano.

L'uso sensato e sistematico di GeoGebra nel laboratorio di matematica può quindi aprire a nuove prospettive didattiche nell'approccio ai problemi, nelle dinamiche fra insegnanti e studenti e soprattutto nel coinvolgimento degli studenti alla costruzione del pensiero matematico, con l'insorgere di pratiche che hanno positive conseguenze sull'apprendimento della disciplina.

3. Un occhio alla metodologia e al progetto m@t.abel

Particolare rilievo nella didattica quotidiana riveste il *laboratorio di matematica*: la formazione matematica degli studenti, infatti, va costruita attraverso un attento lavoro di laboratorio, ed è scorretto pensare che i nostri studenti riescano ad acquisire conoscenze solo perché apprendono delle parole.

In "Matematica 2003 – La Matematica per il cittadino" si definisce laboratorio di matematica un "insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti." (Matematica 2003 – pag 28-29).

In quest'ottica la costruzione di significati e di conoscenze non è solo legata agli strumenti utilizzati, ma anche – e soprattutto – alle interazioni che si creano sia tra le persone sia tra i vari strumenti.

Nella didattica laboratoriale sono previsti problemi aperti che possono essere stimolo per gli allievi nel costruirsi un pezzo di sapere: essi forniscono la possibilità di utilizzare strumenti e strategie differenti per arrivare alla soluzione a patto che siano dei problemi reali, non semplici esercizi, e che il docente sia disposto ad accettare strategie di soluzioni differenti da quelle previste. Nella metodologia laboratoriale sono previste più fasi: ai momenti di lavoro di gruppo in cui gli studenti interagiscono tra loro, organizzati in gruppi di livello o omogenei secondo i casi, si intervallano momenti di riflessione individuale e momenti di condivisione dei saperi con una discussione matematica orchestrata dall'insegnante. È fondamentale che il sapere costruito e condiviso venga successivamente istituzionalizzato dal docente con un proprio intervento attivo.

Tra gli strumenti a disposizione degli studenti vi sono carta e matita, righelli, spaghi, … ma anche il software GeoGebra. Come già specificato tale software consente allo studente di esplorare, fare esperienze, osservare, produrre e formulare congetture e validarle.

Le schede di lavoro dettagliate presenti nel volume hanno lo scopo di incentivare le fasi di scoperta e di argomentazione nei ragazzi, ma non possono essere utilizzate senza l'intervento attivo del docente.

Le attività qui raccolte non sono esaustive di un percorso didattico in verticale di matematica. Tali attività però si inseriscono nei percorsi proposti dall'UMI-CIIM che propone, oltre ai volumi di *Matematica 2001*, *2003* e *2004*, un percorso di matematica secondo le indicazioni curriculari del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado, articolato in due proposte, una riferita ai corsi scolastici con sole tre ore di matematica la settimana e una invece più ampia. Tali percorsi si trovano al seguente indirizzo *http://www.umi-ciim.it/costruzione_di_percorsi_didattici_di_matematica_coerenti_con_le_indicazioni_della_riforma--85.html*; farà seguito anche un percorso per il secondo biennio.

In ultimo vorremmo sottolineare come alcune attività presenti in questo libretto si affianchino a quelle del progetto m@t.abel (*http://www.risorsedocentipon.it*). M@t.abel propone numerose attività didattiche che permettono al docente di mettere in pratica nuove metodologie di insegnamento attraverso una vasta offerta di spunti e interventi didattici da sperimentare in classe, secondo la finalità del progetto stesso che è quella di fornire agli insegnanti strumenti collaudati per avvicinare gli studenti alla matematica in maniera più coinvolgente, promuovendo l'utilizzo di concetti ed esempi legati alla vita quotidiana.

CAPITOLO 1

Rette, segmenti, angoli: costruire per comprendere

Introduzione

Ogni insegnante che abbia dovuto progettare un percorso di geometria razionale per i propri allievi conosce bene le difficoltà connesse con l'approccio iniziale. Che fare? Come far evolvere una geometria basata essenzialmente su percezioni sensoriali ed aspetti concreti ad uno studio che – pur con tutte le attenzioni ad evitare inutili eccessi di rigore – sposti l'attenzione su concetti quali *definizioni, postulati, relazioni,* per giungere, come obiettivo finale alla logica della dimostrazione?

GeoGebra, come i suoi predecessori software di geometria dinamica, si è rivelato un potente mediatore per avviare gli allievi a passare da esperienze concrete, fisiche a riflessioni teoriche. Già la comprensione delle regole che governano le prime costruzioni (pensiamo alla costruzione di una retta per due punti) induce gli allievi a mettere a fuoco, concretamente, il significato dei postulati della geometria euclidea. Si tratta di qualcosa di più delle attività di manipolazione diretta – pur essenziale – di oggetti come fogli di carta ritagliati o piegati, di cannucce, ecc: appropriandosi degli strumenti geometrici di GeoGebra l'allievo accumula esperienze che lo aiuteranno a dare significato ai concetti; costruendo figure che reggano al *dragging* ha la possibilità di controllare visivamente l'insieme delle relazioni che definiscono una figura (ciò che varia e ciò che non varia nel trascinamento).

Riferimenti alle indicazioni ministeriali

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

- L'alunno riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.
- Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.
- Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro, ...).

Riferimenti alle Indicazioni ministeriali e alle Linee guida per il biennio della scuola secondaria

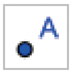
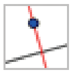
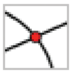
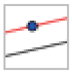
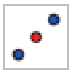
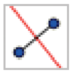
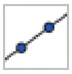
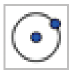
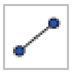
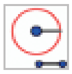
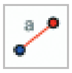
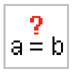
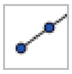
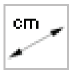
- Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.
- Lo studente apprenderà i principi matematici di base coinvolti nelle diverse tecniche di rappresentazione delle figure dello spazio e le relazioni tra di essi e le tecniche in uso nelle discipline grafiche e geometriche (*Indicazioni nazionali per i Licei*).

Lo studente apprenderà a:

- confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni;
- analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*).

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*	*Strumenti*	*Icone*
Punto		Retta perpendicolare	
Intersezione di due oggetti		Retta parallela	
Punto medio		Asse	
Retta per due punti		Circonferenza dati centro e punto	
Segmento per due punti		Compasso	
Segmento – lunghezza fissa		Relazione tra due oggetti	
Semiretta		Distanza o lunghezza	

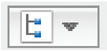
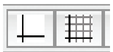
Torna indietro (Ripristina) Click sull'icona in alto a destra al fondo della barra delle icone	

Proprietà degli oggetti GeoGebra:

Mostra etichetta	Tasto destro mouse sull'oggetto *Mostra etichetta*
Rinomina	Tasto destro mouse sull'oggetto *Rinomina* All'apertura della casella di testo cancellare il vecchio nome e indicare il nome nuovo

Colore	Tasto destro mouse sull'oggetto *Proprietà* Scegliere la finestra *Colore* e selezionare il colore desiderato Oppure attivare il menu della Vista Grafica cliccando su ▶, selezionare con il mouse l'oggetto e scegliere il colore nella tavolozza che appare premendo ▼ in corrispondenza di ■ o di ▬▬▬ sotto la scritta Vista Grafica
Fissa un oggetto	Tasto destro mouse sull'oggetto *Proprietà* Spuntare *Fissa oggetto*
Traccia	Tasto destro mouse sull'oggetto Spuntare *Traccia attiva*

Viste

Menu Vista Algebra	 consente di ordinare gli oggetti per *Dipendenza, Tipo di oggetto, Livello, Ordine di costruzione*
Menu Vista Grafica	 consente tra l'altro di attivare/disattivare gli assi e/o la griglia  consente di modificare *Colore* e *Stile* degli oggetti senza attivare il menu *Proprietà*

OSSERVAZIONE 1: i menu delle viste si attivano con la freccia ▶ nella barra dell'intestazione.

OSSERVAZIONE 2: gli oggetti liberi, come indica il loro nome, si possono muovere liberamente. Gli oggetti dipendenti, definiti a partire da oggetti preesistenti, hanno un minor grado di movimento, perché vincolati ad altri oggetti attraverso qualche relazione che deve essere mantenuta anche quando avviene il trascinamento. Per questo in alcuni casi non viene consentito alcun movimento perché quest'ultimo modificherebbe le relazioni.

1. Punti e rette nel piano[1]

Lo scopo di queste prime attività è quello di prendere confidenza con il software, le sue regole ed i suoi comandi e riflettere parallelamente sugli oggetti geometrici che si costruiscono.

In taluni casi le attività suggeriscono di alternare costruzioni geometriche su carta, con i classici strumenti di riga e compasso, a costruzioni sul piano di GeoGebra, per cogliere le analogie e le differenze di rappresentazioni diverse di uno stesso oggetto. In particolare in GeoGebra entrano subito in gioco le potenzialità del trascinamento e il significato di elemento libero o vincolato; da ciò vengono esaltate le relazioni fra i diversi oggetti.

[1] Schede di G. Di Caprio e P.G. Laiolo

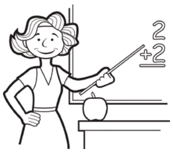
Scendendo nel particolare delle singole attività si possono fare le seguenti osservazioni: a differenza del foglio di carta, in cui una retta si può disegnare senza indicare in modo esplicito i due punti per cui passa, in GeoGebra il comando *Retta per due punti* mette in evidenza due precisi punti del piano per cui passa la retta; tali punti sono *Oggetti liberi* di muoversi nel piano mentre la retta risulta un *Oggetto dipendente* dai due punti, quindi con un grado di libertà in meno. Attivando il menu della Vista Algebra, si può selezionare *Ordina oggetti per…/Dipendenza*. Si potranno allora vedere i due punti tra gli oggetti liberi e la retta tra quelli dipendenti.

Per muovere la retta nel piano si può:

- afferrare la retta con il cursore: la retta si muove mantenendo la stessa direzione iniziale;
- muovere nel piano uno dei due punti: la retta cambia direzione.

Un secondo modo per disegnare una retta è quello di indicare un punto ed una direzione: su questa coppia di informazioni si basano i comandi *Retta parallela*, *Retta perpendicolare*. È chiaro che in queste situazioni la direzione della retta costruita non è più modificabile con il trascinamento diretto, ma dipende dalla posizione della retta a cui fa riferimento.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Fare esperienza su punti e rette come elementi primitivi della geometria euclidea; esplicitare, attraverso la costruzione, i postulati alla base di tali elementi primitivi.
  - o Individuare le relazioni che possono esistere fra un punto ed una retta, fra due rette (appartenenza, parallelismo, perpendicolarità).
- **Ordine di scuola**:
  - o Attività 1, 2 e 3: scuola secondaria I grado, biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**: Analizzare le diverse posizioni che possono assumere nel piano punti e rette e definire in conseguenza possibili relazioni fra di essi.
  - o Attività 1: rette per un punto, per due punti distinti.
  - o Attività 2: intersezione fra due rette. Rette parallele. Rette perpendicolari.
  - o Attività 3: retta perpendicolare ad un segmento.
- **Indicazioni metodologiche**:

  Non ci sono prerequisiti specifici per queste attività: gli studenti possono apprendere i primi rudimenti del software e contemporaneamente esplorare le situazioni geometriche indicate nelle schede. Si inizia con un lavoro con carta e penna, importante per non escludere strumenti quali riga e compasso; la costruzione fatta attraverso il software metterà in evidenza l'importanza della dinamicità della figura ma anche la necessaria attenzione alla sintassi dei comandi ed alle regole costruttive di GeoGebra.

  Il lavoro può essere svolto dagli studenti a piccoli gruppi (2/3).

Le schede non richiedono spiegazioni preliminari da parte del docente in quanto contengono le poche indicazioni sulle procedure da utilizzare per il software, per altro molto semplici; si richiede invece agli studenti di descrivere cosa si osserva, inquadrandolo geometricamente. Molto importante che al termine del lavoro ci sia una comunicazione in cui ciascun gruppo indica ciò che ha osservato e come ha risposto ai quesiti: sarà cura del docente operare una sintesi sul lavoro e avviare attraverso questa esperienza – anche con l'aiuto di note storiche – alle idee di elemento primitivo e di elemento definito esplicitamente, di postulato e di definizione, di relazione tra elementi geometrici.

- **Tempi**:
  - Attività 1, 2 e 3: 1 ora in totale.

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Sono riportati gli esempi più significativi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Disegna un punto A. Quante rette puoi disegnare che passano per quel punto? Disegna un altro punto B. Quante rette puoi disegnare che passano per i due punti?

Apri in un nuovo file GeoGebra la Vista Grafica senza assi e griglia.

Crea due punti distinti e chiamali A e B; traccia la retta *r* passante per A e B. Disegna ora un punto C distinto da A e B non appartenente a *r*: quante rette distinte puoi ancora tracciare in questa situazione (con lo strumento *Retta per due punti*)?

Scheda per lo studente Attività 2

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica senza assi e griglia.

Crea due punti distinti e chiamali A e B, traccia la retta *r* passante per A e B.

Denomina la retta appena tracciata con *s* (tasto destro mouse/*Rinomina*).

Costruisci una retta *r* distinta da *s*.

Determina i punti in comune tra le due rette usando lo strumento *Intersezione di due oggetti*.

Sposta *s* nel piano. Per far questo usa il mouse per muovere i punti A e B (quale movimento viene eseguito dalla retta?) oppure posizionati sulla retta in un punto diverso dai due (quale movimento ottieni in questo caso?)

Apri il menu della Vista Algebra e visualizza gli oggetti per *Dipendenza*: che cosa osservi per A, B e *s*? Come pensi che questo influisca sui movimenti di *s*?

Osserva al variare di *s* quanti punti in comune possono avere *r* ed *s*. Prova a posizionare *s* in modo che le rette non abbiano punti in comune. È possibile?

Costruisci la parallela *q* alla retta *r* passante per un punto P esterno ad r (strumento *Retta parallela*). Colora di rosso P e la parallela *q* (tasto destro del mouse, *Proprietà*, *Colore*). Muovi con il mouse sia i punti che hanno generato la retta *r* sia la retta stessa: che cosa osservi?
E muovendo il punto P?
Puoi spostare la parallela *q*? Determina i punti in comune tra *r* e *q* usando lo strumento *Intersezione di due oggetti.* Cosa osservi nel grafico? E nella Vista Algebra?

Costruisci la perpendicolare *t* alla retta *r* passante per un punto Q esterno ad *r* (strumento *Retta perpendicolare*). Colora di verde Q e la perpendicolare *t.* Cosa succede muovendo la retta *r*?
E muovendo il punto Q?
Puoi spostare la perpendicolare *t*?

In che relazione stanno le rette *q* e *t*? Utilizza lo strumento *Relazione tra i due oggetti.*

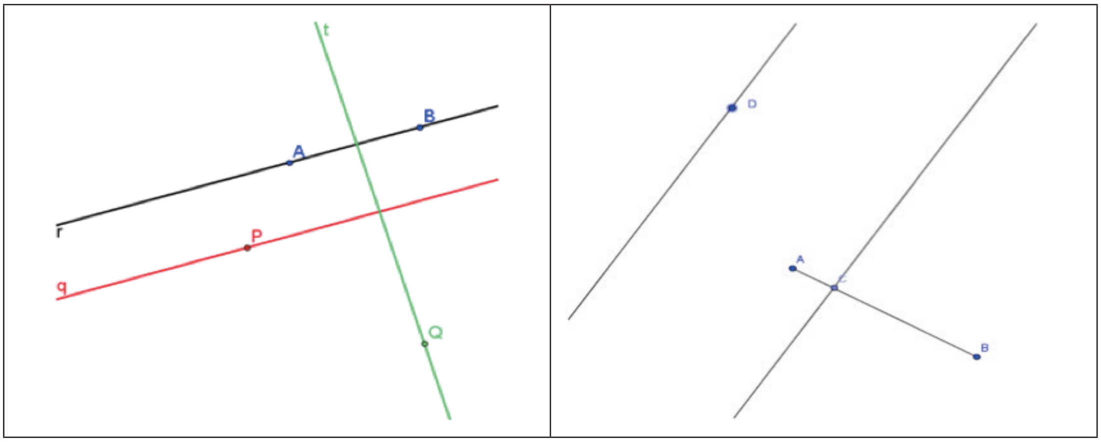
Prova a cancellare il punto A (tasto destro/*Elimina*). Cosa accade? Perché?
Annulla l'operazione appena effettuata (mediante l'icona *Torna indietro*), e prova a cancellare il punto P. Cosa accade? Perché?

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 3


Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.
Disegna il segmento AB.
Con lo strumento *Punto su oggetto* inserisci un punto C sul segmento. Disegna quindi la retta perpendicolare ad AB passante per C. Muovi il punto C ed osserva le diverse posizioni che può assumere la retta perpendicolare.

Prendi ora un punto D che non stia su AB. Riesci ancora a disegnare la retta perpendicolare ad AB passante per D? In realtà a che cosa risulta perpendicolare la retta trovata?



Videate Attività 2 e 3

2. Trasporto rigido di segmenti e angoli[2]

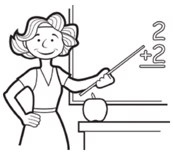
Uno dei concetti fondamentali della geometria euclidea, il concetto di congruenza, si basa sulla proprietà del trasporto rigido degli oggetti nel piano. Come nel piano del foglio di carta, così anche in GeoGebra lo strumento principe che regola tale trasporto è il *Compasso* di cui si fa uso nelle attività seguenti per operare somme e differenze di segmenti e per costruire angoli congruenti ad un angolo prefissato.

Al termine dell'esperienza l'insegnante potrà precisare attraverso esempi e, successivamente, definire le proprietà di segmenti adiacenti e consecutivi. Non mancherà inoltre di mettere in evidenza la commutatività dell'operazione di somma di segmenti.

Più complessa l'operazione di costruzione di angoli congruenti a un angolo dato, che si suggerisce di svolgere nel biennio della scuola secondaria superiore. La validazione della congruenza può avvalersi di strumenti empirici come il trasporto di un angolo sull'altro (operazione che richiede di fissare alcuni oggetti per evitare che le figure si deformino nel trascinamento), su misure fornite dal sistema oppure, in modo logicamente più rigoroso, attraverso il terzo criterio di congruenza dei triangoli.

L'attività sulla costruzione di angoli congruenti può essere completata con operazioni di somma e differenza di angoli; anche in questo caso l'insegnante può giungere a definire angoli consecutivi e adiacenti.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Costruire segmenti congruenti a un segmento dato. Sommare e sottrarre segmenti
  - o Costruire angoli congruenti a un angolo dato; verificare la congruenza con il trascinamento ovvero dimostrare la congruenza degli angoli attraverso il terzo criterio di congruenza dei triangoli.
- **Ordine di scuola**:
  - o Attività 1 e 2: scuola secondaria I grado, primo biennio scuola secondaria II grado.
  - o Attività 3: primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:
  - o Attività 1: Trasporto di segmenti; somma e differenza di segmenti.
  - o Attività 2: Multiplo di un segmento.
  - o Attività 3: Trasporto di un angolo.
- **Indicazioni metodologiche**:

  Come nelle attività precedenti gli alunni affronteranno le schede di lavoro a piccoli gruppi, appuntando le riflessioni ed i commenti durante lo svolgimento del lavoro.

  La discussione comune ed il confronto che segue il lavoro a piccoli gruppi focalizzerà i concetti geometrici di *trasporto rigido* e di congruenza di segmenti e angoli.

[2] Schede di G. Di Caprio e P.G. Laiolo

- **Tempi**:
  - o Attività 1, 2 e 3: 1 ora in totale.

 Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Sono riportati gli esempi più significativi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica senza assi e griglia.

Disegna due segmenti AB e CD, inizialmente con AB più grande di CD.

Disegna una semiretta EF e nascondi il punto F (mediante lo strumento *Mostra/Nascondi oggetto*).

Con lo strumento *Compasso* traccia una circonferenza con centro E e raggio AB. Chiama G il punto di intersezione della circonferenza con la semiretta. I segmenti AB e EG sono …….

Con lo strumento *Compasso* traccia una circonferenza con centro G e raggio CD.

Chiama H e I i due punti di intersezione tra la semiretta e la circonferenza. Costruisci i segmenti EI e EH con lo strumento *Segmento tra due punti.*

I segmenti EI e EH corrispondono alla somma e alla differenza di AB e CD. Quale corrisponde alla somma e quale alla differenza? Colora di rosso la differenza.

Misura le lunghezze dei segmenti AB e CD e dei nuovi segmenti EI ed EH, selezionando lo strumento *Distanza o lunghezza* e facendo click a turno su ciascuno dei segmenti sopra nominati. La misura rilevata da GeoGebra conferma la tua costruzione?

Prova a cambiare con il trascinamento le lunghezze dei segmenti AB e CD. È sempre possibile costruire la differenza AB – CD? In quale caso il segmento EH sparisce? Perché? Giustifica la risposta.

Ripeti la stessa costruzione precedente trasportando prima il segmento CD e poi AB. Ottieni lo stesso risultato?

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 2

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica senza assi e griglia.

Disegna un segmento AB. Traccia la semiretta CD.

Costruisci un segmento CI pari a tre volte il segmento AB.

Colora di rosso il segmento CI.

Controlla la misura dei segmenti AB e CI attraverso lo strumento *Distanza e lunghezza* o semplicemente posizionando il mouse sopra il nome dei segmenti, indicati nella Vista Algebra.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 3

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica senza assi e griglia.

Disegna un angolo BAC utilizzando due semirette con origine in A. Disegna poi una retta distinta DE.

Traccia una circonferenza di centro A con raggio a piacere. La circonferenza interseca i due lati dell'angolo in due punti F e G. Come sono i segmenti AF e AG?

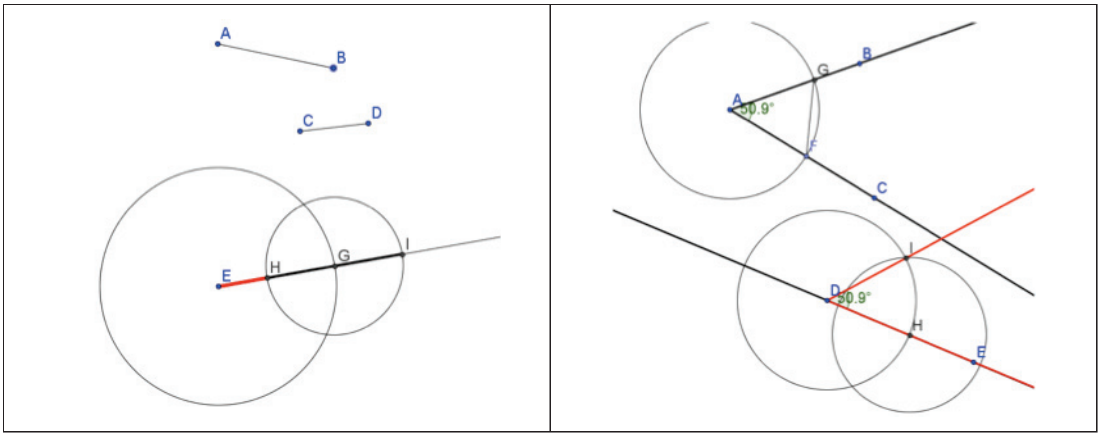
Riporta il segmento AF sulla retta DE: otterrai il segmento DH. Descrivi il procedimento usato.

Unisci F e G con lo strumento *Segmento tra due punti.* Con lo strumento *Compasso* puoi tracciare una circonferenza di raggio FG e di centro H.

Sia I una delle intersezioni tra la circonferenza di centro D e raggio DH e la nuova circonferenza che hai appena tracciato. L'angolo HDI è l'angolo cercato. Perché?

Verifica con il trascinamento che la tua costruzione sia corretta.

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 1 e 3

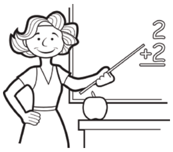
3. Costruzione di figure complesse[3]

Invitare gli allievi a riprodurre sul piano GeoGebra una determinata figura composta da oggetti geometrici quali segmenti o archi di circonferenza costituisce un buon esercizio di riflessione sulle proprietà geometriche e sulle relazioni fra gli elementi del disegno da costruire. L'esperienza mostra che gli allievi sono generalmente coinvolti in questo tipo di compito; la molteplicità di strategie risolutive può avviare un'interessante discussione.

Nel caso della scheda seguente gli alunni potranno mettere in opera le conoscenze sul trasporto di segmenti di cui hanno fatto esperienza nelle attività precedenti; si osservi tuttavia che la costruzione di figure complesse può richiedere una limitazione delle condizioni di esistenza, che comporta l'uso di disequazioni.

[3] Scheda di G. Di Caprio e P.G. Laiolo

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Riconoscere proprietà geometriche in contesti inusuali.
  - o Mettere a punto strategie di costruzione di figure complesse.
- **Ordine di scuola**:
  - o Attività 1: biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:
  - o Si richiede di "scrivere" la parola "THE" utilizzando il software; le misure delle lettere che compongono la parola devono rispettare determinate condizioni.

    Per la soluzione è necessario individuare le proprietà geometriche delle lettere e predisporre una costruzione opportuna, utilizzando la perpendicolarità, il parallelismo, il punto medio e il trasporto di misura.
- **Indicazioni metodologiche**:
  - o Modalità di lavoro laboratoriale. L'insegnante incoraggerà soluzioni diverse e ne stimolerà la condivisione nel gruppo classe. Il software permette di controllare la validità della costruzione passo passo mediante la "prova del trascinamento".
- **Tempi**:
  - o Attività 1: 2 ore.

 Scheda per lo studente Attività 1.

È riportato un esempio di videata con il protocollo di una possibile costruzione.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.

Costruisci le lettere che compongono la parola THE, in modo che:

- i segmenti orizzontali siano la metà di quelli verticali;
- la distanza tra le lettere sia la stessa;

Descrivi nei dettagli i passi della tua costruzione.

Verifica con il trascinamento che la tua costruzione sia corretta.

Salva il file che hai costruito.

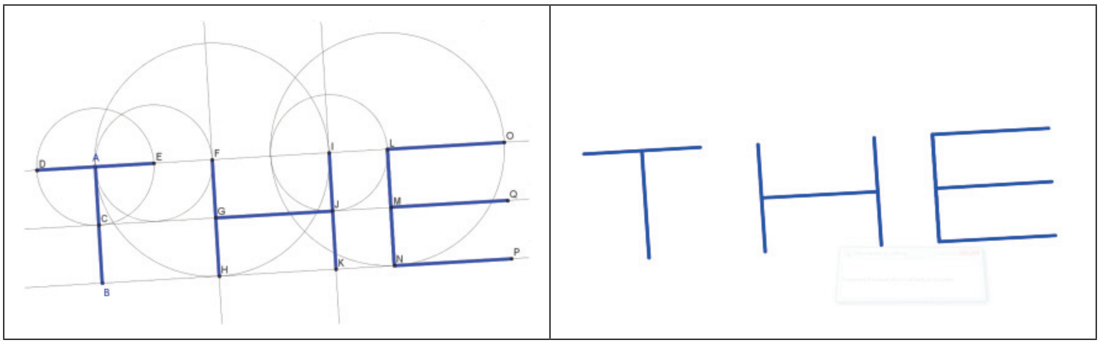
Protocollo di costruzione attività 1

N.	Nome	Icona	Definizione
1	Punto A		
2	Punto B		
3	Segmento *a*		Segmento [A, B]
4	Retta *b*		Retta per B perpendicolare a *a*
5	Retta *c*		Retta per A perpendicolare a *a*
6	Punto C		Punto medio di *a*
7	Retta *d*		Retta per C parallela a *b*
8	Circonferenza *e*		Circonferenza per C di centro A
9	Punto D		Punto di intersezione tra *e* e *c*
10	Punto E		Punto di intersezione tra *e* e *c*
11	Segmento *g*		Segmento [D, E]
12	Circonferenza *f*		Circonferenza per A di centro D
13	Punto F		Punto di intersezione tra *f* e *c*

N.	Nome	Icona	Definizione
21	Retta *l*		Retta per J perpendicolare a *c*
22	Punto H		Punto di intersezione tra *q* e *c*
23	Circonferenza *p*		Circonferenza per H di centro J
24	Punto K		Punto di intersezione tra *p* e *c*
25	Retta *j*		Retta per K perpendicolare a *c*
26	Punto L		Punto di intersezione tra *k* e *b*
27	Punto M		Punto di intersezione tra *d* e *h*
28	Punto N		Punto di intersezione tra *h* e *i*
29	Punto O		Punto di intersezione tra *p* e *b*
30	Punto P		Punto di intersezione tra *d* e *l*
31	Punto Q		Punto di intersezione tra *d* e *j*
32	Punto R		Punto di intersezione tra *b* e *j*
33	Segmento *m*		Segmento [F, L]

14	Retta *h*		Retta per F perpendicolare a *c*
15	Circonferenza *k*		Circonferenza per A di centro F
16	Punto G		Punto di intersezione tra *k* e *c*
17	Retta *i*		Retta per G perpendicolare a *c*
18	Punto I		Punto di intersezione tra *d* e *i*
19	Circonferenza *q*		Circonferenza per I di centro G
20	Punto J		Punto di intersezione tra *q* e *c*

34	Segmento *n*		Segmento [G, N]
35	Segmento *r*		Segmento [M, I]
34	Segmento *n*		Segmento [G, N]
36	Segmento *s*		Segmento [J, O]
37	Segmento *t*		Segmento [O, R]
38	Segmento *a*		Segmento [P, Q]
39	Segmento *b*		Segmento [J, K]



Videate Attività 1

4. Luoghi di punti nel piano: una prima costruzione[4]

L'asse di un segmento può essere definito in modo *globale*, come retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio, o come *insieme di punti,* ciascuno dei quali ha la caratteristica di essere equidistante dagli estremi del segmento. Per gli allievi non è sempre facile comprendere che le due definizioni si riferiscono allo stesso oggetto geometrico; una dimostra-

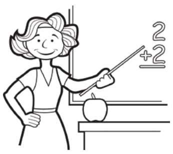
[4] Scheda di P. Accomazzo

zione rigorosa, basata sulle proprietà del triangolo isoscele garantisce che le due definizioni caratterizzino entrambe l'asse di un segmento.

Un approccio sperimentale, attraverso GeoGebra può far riflettere gli allievi e preparare il terreno alla dimostrazione. Non si dimentichi inoltre che la relazione di equidistanza dagli estremi, caratteristica dei punti dell'asse, è la proprietà che permette di costruire la retta asse per mezzo del compasso, costruzione che talvolta gli allievi usano senza essere consapevoli delle proprietà che ne sono alla base.

L'attività introduce inoltre al concetto di *luogo di punti*, insieme di punti del piano definibile con una precisa caratteristica e alla proprietà degli oggetti di GeoGebra *Traccia*, molto utile per costruire visivamente, passo dopo passo, il luogo come insieme di punti.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Comprendere la definizione di asse di un segmento come retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio.
  - o Comprendere il significato di luogo geometrico di punti nel piano; individuare una proprietà caratterizzante l'insieme di punti ed esprimerla nel linguaggio della matematica.
  - o Individuare la proprietà caratteristica di equidistanza dagli estremi del segmento che connota ogni punto della retta asse.
- **Ordine di scuola**:
  - o Attività 1: biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:
  - o si richiede di disegnare nella Vista Grafica l'asse di un segmento come retta che passa per il punto medio ed è perpendicolare al segmento. Successivamente, sullo stesso disegno precedente, si chiede di costruire alcuni punti del piano che abbiano la caratteristica di essere equidistanti dagli estremi del segmento. La sovrapposizione del luogo di tali punti all'asse disegnato in precedenza dovrebbe indurre a comprendere che le due costruzioni evidenziano proprietà diverse di uno stesso oggetto.
- **Indicazioni metodologiche**:
  - o Modalità di lavoro laboratoriale. Discussione.
- **Tempi**:
  - o Attività 1: 1 ora.


Scheda per lo studente Attività 1.

È riportato un esempio di videata dell'attività 1.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica senza assi e griglia.

Disegna il segmento AB. Coloralo di verde ed ispessiscine il tratto.

Con lo strumento *Punto medio* del menu Punti individua il suo punto medio che rinominerai con M. Traccia per M la retta perpendicolare al segmento AB. Chiama tale retta r e colorala in rosso.

La retta r è un particolare *luogo di punti* nel piano che prende il nome di **asse** del segmento AB

Ora traccia una retta per A e B.

Prendi un punto C sulla retta in modo che la distanza AC sia maggiore della distanza AB.

Disegna la circonferenza di centro A e raggio AC.

Con *Compasso* costruisci la circonferenza di centro B e raggio AC (segna prima gli estremi A e C e poi trascina il centro della circonferenza in B).

Con *Intersezione di due oggetti* individua i punti D ed E intersezioni delle due circonferenze.

Che relazione c'è fra i segmenti DA e DB? Hanno la stessa lunghezza? Giustifica le tue affermazioni, facendo riferimento alla loro costruzione.

Ora attiva la traccia del punto D (tasto destro del mouse su D, *Traccia* attiva); fai la stessa cosa sul punto E.

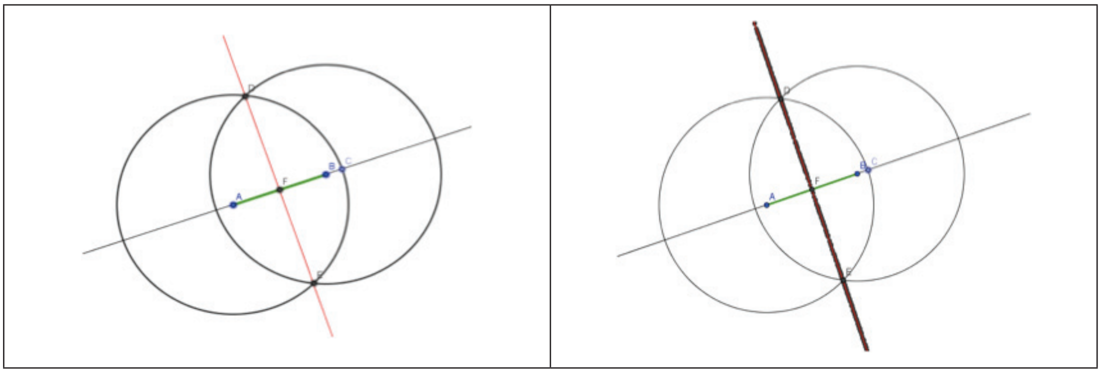
Muovi il punto C: come si dispongono i punti di intersezione delle due circonferenze?

Preso a caso uno dei punti intersezione, che cosa puoi dire sulle sue distanze da A e da B?

Sulla base di queste osservazioni definisci l'insieme dei punti che hai ottenuto con le tracce di D e di E.

Ora che hai capito come si costruisce l'asse di un segmento e quali sono le sue proprietà, confronta la retta r che hai costruito con quella che ottieni con l'icona *Asse* del menu: scegli A e B come estremi.

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 1

CAPITOLO 2

Triangoli: una rappresentazione che favorisce la scoperta di proprietà geometriche

Introduzione[1]

Nella didattica della geometria emergono alcuni nodi concettuali nelle difficoltà degli studenti a riconoscere, comprendere e applicare definizioni e proprietà in vari contesti; tali difficoltà sembrano palesarsi a qualunque età. Per esempio gli studenti presentano difficoltà nel tracciare le altezze in un triangolo, soprattutto se il triangolo è ottusangolo e non è rappresentato nella posizione classica, con l'altezza verticale, oppure nel tracciare la distanza tra due rette parallele o tra un punto e una retta, in particolare quando le rette non sono in posizioni standard. Spesso tali difficoltà sono causate dal prevalere di stereotipi nelle spiegazioni degli insegnanti e nei libri di testo oppure alla mancata comprensione di definizioni, seppure ricordate e recitate a memoria.

Le attività qui presentate intendono mettere a fuoco alcuni nodi concettuali fondamentali, che possono essere affrontati a diversi livelli di approfondimento, con l'obiettivo comune di condurre progressivamente lo studente dall'intuizione e dalla scoperta di proprietà geometriche alla loro rappresentazione razionale e a una piena comprensione delle stesse, in modo da contribuire a far raggiungere agli allievi competenze utili a interpretare la realtà e non solo gli enti matematici.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

- L'alunno riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.
- Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.
- Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...).
- Riesce a risolvere (facili) problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

Riferimenti alle Indicazioni ministeriali e alle Linee guida per il biennio e il triennio della scuola secondaria

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.

Lo studente apprenderà i principi matematici di base coinvolti nelle diverse tecniche di rappresentazione delle figure dello spazio e le relazioni tra di essi e le tecniche in uso nelle discipline grafiche e geometriche.

---

[1] Dalla premessa di G. Di Caprio e P.G. Laiolo alle attività presentate nei corsi.

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria. (*Indicazioni nazionali per i Licei*)

Lo studente apprenderà a:

- eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici;
- porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive;
- confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*)

Lo studente apprenderà a:

- utilizzare le strategie del pensiero razionale negli aspetti dialettici e algoritmici per affrontare situazioni problematiche, elaborando opportune soluzioni;
- applicare i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli (*Indicazioni nazionali per i Licei*)

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Punto	
Punto su un oggetto	
Intersezione di due oggetti	
Punto medio o centro	
Retta – per due punti	
Segmento tra due punti	
Semiretta – per due punti	

Strumenti	*Icone*
Retta perpendicolare	
Poligono	
Circonferenza – dati il centro e un punto	
Compasso	
Relazione tra due oggetti	
Simmetria centrale	
Inserisci testo	

Comandi GeoGebra con inserimento nella barra apposita:

Mostra etichetta	Tasto destro mouse sull'oggetto *Mostra etichetta*
Mostra / Nascondi oggetto	Tasto destro del mouse sull'oggetto Click sul segno di spunta accanto a *Mostra oggetto*
Rinomina	Tasto destro del mouse sull'oggetto *Rinomina* All'apertura della casella di testo cancellare il vecchio nome ed indicare il nome nuovo
Cambia colore	Tasto destro del mouse sull'oggetto *Proprietà* *Colore* (Selezionare)
Traccia	Tasto destro del mouse sull'oggetto *Attiva traccia*

OSSERVAZIONE 1: nelle attività qui presentate si fa riferimento al *Protocollo di costruzione,* una tabella contenente tutti i passi della costruzione.

Per accedere al *Protocollo di costruzione* interattivo è necessario selezionare la voce di menu *Protocollo di costruzione - Mostra* nel menu *Visualizza*.

Con il *Protocollo di Costruzione* lo studente può rivedere la costruzione passo per passo; per navigare è possibile utilizzare la tastiera:

- il tasto freccia su ↑ consente di passare al passo precedente della costruzione;
- il tasto freccia giù ↓ consente di passare al passo successivo della costruzione;
- il tasto HOME consente di ritornare all'inizio del protocollo di costruzione;
- il tasto FINE consente di andare all'ultimo passo della costruzione;
- il tasto CANC elimina il passo della costruzione selezionato.

OSSERVAZIONE 2: nella finestra di dialogo di *Inserisci testo* sono possibili alcune operazioni:

- scrivere una qualsiasi sequenza di lettere, numeri e simboli che rimarranno fissi (*testo statico*);
- selezionare "Formula LaTeX" e scrivere una sequenza di lettere e simboli (eventualmente usando la finestra a discesa *Simboli*): si ottiene anche questa volta un *testo statico*, pur se con formato differente dal precedente;
- scrivere una qualsiasi sequenza di lettere, numeri e simboli e quindi selezionare dalla finestra a discesa *Oggetti* quello di cui si vuole rappresentare il valore. In questo caso, modificando il valore dell'oggetto, varia anche il *testo* che è quindi *dinamico*.

Inserire nella *Vista Grafica* uno *slider a* (sono in questo caso ininfluenti i parametri che lo definiscono).
Selezionando ogni volta l'icona *Inserisci testo*, posizionarsi successivamente in tre punti differenti dello schermo, scrivendo:

1. b = a + 2 e premere Invio;
2. selezionare "Formula LaTeX" e scrivere b = a + 2 e premere Invio;
3. scrivere b =, selezionare negli *Oggetti a*, quindi scrivere + 2 (osservare come appare la scritta prima di premere Invio).

Muovere ora il punto sullo *slider* ed osservare cosa accade alle scritte.

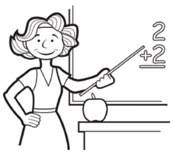
OSSERVAZIONE 3: è possibile che alcuni oggetti siano visibili se sono verificate certe condizioni (*valore logico o booleano true*) e che non lo siano se le stesse condizioni non sono verificate (*valore logico o booleano false*). Questo si ottiene scegliendo nelle *Proprietà dell'oggetto* (tasto destro del mouse) *Avanzate*; quindi nella scheda inserire in "Condizione per mostrare l'oggetto" la relazione che deve verificarsi. ATTENZIONE: l'uguaglianza deve essere inserita con il doppio uguale (= =) o attraverso il simbolo $\stackrel{?}{=}$ selezionabile dalla finestra che si apre cliccando sul simbolo a destra $\boxed{\alpha}$.

1. Il triangolo che inganna[2]

Lo scopo dell'attività è osservare con i ragazzi la differenza che c'è in GeoGebra tra oggetti liberi e dipendenti, ma soprattutto toccare con mano l'importanza di porre condizioni nella costruzione di un oggetto geometrico. Si chiede agli allievi di confrontare due triangoli rettangoli: uno costruito *ad occhio* utilizzando la griglia, l'altro imponendo la perpendicolarità tra le rette che contengono i cateti.

Le domande finali della scheda sono di supporto per l'analisi e l'eventuale discussione matematica successiva e hanno lo scopo di far riflettere sull'inadeguatezza della prima costruzione, in particolare di far cogliere la differenza tra una figura che sembra possedere visivamente alcune caratteristiche e una che invece le possiede effettivamente.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Fare esperienza su costruzioni con il software, in particolare sulla costruzione di punti e segmenti liberi o vincolati a condizioni;
  - o Cogliere la differenza tra figure (triangoli) che sembrano possedere visivamente alcune caratteristiche e altre che le possiedono effettivamente perché imposte: la differenza tra *disegnare* e *costruire* un triangolo rettangolo.
- **Ordine di scuola**:
  - o 3° anno scuola secondaria I grado.
  - o 1° anno scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:
  - o Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso di GeoGebra.
  - o Riconoscere la differenza tra disegno e costruzione geometrica, comprendendo il significato dell'imposizione di condizioni.

[2] Schede di G. Di Caprio e P.G. Laiolo

- **Indicazioni metodologiche**:

  L'attività non richiede specifici prerequisiti, anzi è pensata anche con lo scopo di far avvicinare gli allievi al software, mostrando loro alcuni rudimenti fondamentali di GeoGebra.

  Come si può notare dalle schede, la Vista Algebra non è indispensabile per rispondere alle domande, ma si può scegliere di lasciarla comunque, è bene che i ragazzi inizino a familiarizzare con equazioni associate a rette, anche senza farli lavorare esplicitamente su questo: quando sarà il momento di legare l'equazione a una curva nel piano cartesiano gli allievi, in qualche modo, avranno già fatto esperienza sui due registri rappresentativi, se non altro dal punto di vista visivo.

  Il lavoro può essere svolto dagli studenti a coppie o singolarmente.

  È importante che nella prima parte dell'attività i ragazzi siano lasciati liberi di agire, senza intromissioni, esplicite o meno, da parte del docente. Proprio per questo la scheda non richiede spiegazioni preliminari o particolari accorgimenti da parte del docente.

  Il cuore dell'attività è nelle riflessioni finali degli studenti, guidate dalle domande proposte al termine della scheda. Esse hanno lo scopo di far riflette sull'inadeguatezza della prima costruzione.

  Sarebbe importante che tali riflessioni fossero richieste per scritto, in modo da invogliare i ragazzi a pensare e a cercare le parole opportune per esprimere i loro pensieri. È altrettanto importante che al termine dell'attività il docente preveda un momento di discussione di bilancio per condividere le riflessioni e giungere ad una conclusione comune.

- **Tempi**:

  o ½ ora.

   Scheda per lo studente Attività 1.

  Esempio di videata relativa.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica senza assi.

Visualizza la griglia mediante il comando Vista Grafica – Griglia.

Disegna un triangolo rettangolo ABC aiutandoti con la griglia. Prova adesso a trascinare uno qualsiasi dei suoi vertici. Che cosa osservi? Si tratta davvero di un triangolo rettangolo?

Disegna adesso un triangolo rettangolo che rimanga tale anche dopo aver trascinato uno qualsiasi dei suoi vertici seguendo le istruzioni:

- o Traccia un segmento ED.
- o Traccia la retta perpendicolare a ED passante per D.
- o Traccia un punto F su tale retta.
- o Congiungi i punti E, D e F con il comando *Poligono*.

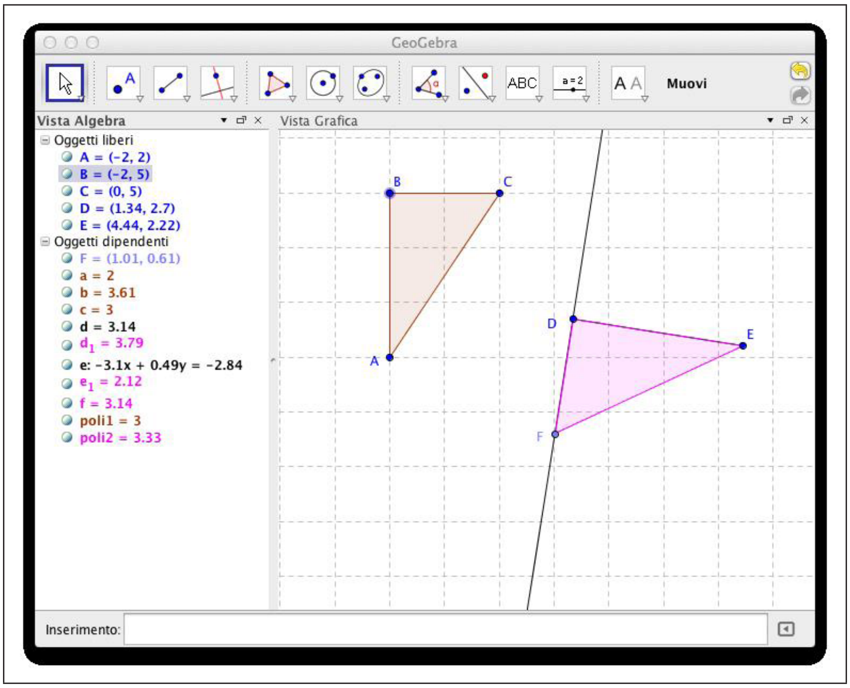
Prova a trascinare il punto D. Cosa osservi? Come cambia il triangolo?

Prova a trascinare il punto E. Cosa osservi? Come cambia il triangolo?

Prova a trascinare il punto F. Puoi trascinarlo in tutte le direzioni? Perché? Come cambia il triangolo?

Verifica che la tua costruzione è corretta, oltre che con il trascinamento, anche utilizzando lo strumento *Relazione tra due oggetti* e descrivi in che modo varia il triangolo trascinando un vertice piuttosto che un altro.

Salva il file che hai costruito.



Videata Attività 1

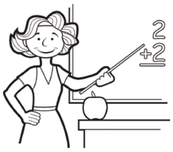
2. Triangoli isosceli[3]

Lo scopo della scheda è scoprire con gli studenti l'esistenza o meno di un triangolo isoscele note le lunghezze dei lati o la misura della base e dell'altezza: quali condizioni si devono imporre per costruire il triangolo? Quali devono essere le relazioni tra le lunghezze date?

La possibilità di ruotare l'inclinazione delle rette dei lati consente di vedere il triangolo isoscele in posizioni diverse da quelle stereotipate proposte generalmente dai libri di testo.

3 Schede tratte da G. Di Caprio e P.G. Laiolo

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Effettuare una costruzione con "riga e compasso" per costruire un triangolo isoscele con alcuni elementi dati.
- **Ordine di scuola**:
  - o 3° anno scuola secondaria I grado.
  - o 1° anno scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:

  Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso tramite GeoGebra e osservare le relazioni tra i vari oggetti.
- **Indicazioni metodologiche**:

  L'attività non richiede specifici prerequisiti e può essere proposta anche ad allievi che non abbiano molta dimestichezza con il software.

  I ragazzi possono lavorare a coppie o singolarmente. È importante che gli allievi siano lasciati liberi di esplorare e di mettere in campo le loro conoscenze anche per controllare la correttezza o meno del loro lavoro. Proprio per questo la scheda non richiede spiegazioni preliminari o particolari accorgimenti da parte del docente.

  Il cuore dell'attività è nelle riflessioni finali degli studenti, guidate dalle domande proposte al termine della scheda. Esse hanno lo scopo di far riflette sulla costruzione e sui legami tra i lati in un triangolo isoscele.

  Sarebbe importante che tali riflessioni fossero richieste per scritto, in modo da invogliare i ragazzi a pensare e a cercare le parole opportune per esprimere i loro pensieri. È altrettanto importante che al termine dell'attività il docente preveda un momento di discussione di bilancio per condividere le riflessioni e giungere a una conclusione comune.
- **Tempi**:
  - o 1 ora.


Scheda per lo studente Attività 1.

Esempio di videata relativa.

Scheda per lo studente Attività 1


Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.

Disegna un segmento AB e un segmento CD.

Costruisci un triangolo isoscele di base AB e lato BE congruente a CD:

- Con lo strumento *Compasso*, riporta il segmento CD tracciando una circonferenza di centro A.
- Ripeti la procedura utilizzando come centro della circonferenza il punto B.
- Individua uno dei punti di intersezione delle due circonferenze e chiamalo E.
- Crea il triangolo ABE. Esso sarà il triangolo cercato, ossia con i lati congruenti di lunghezza uguale a CD.

Prova a variare la lunghezza dei segmenti di partenza AB e CD; osserva che il triangolo rimane isoscele oppure scompare. Perché? In quale caso esso scompare?

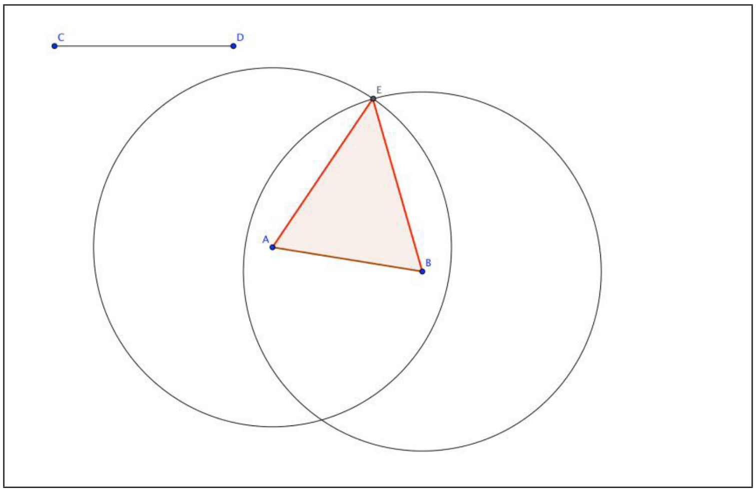
Descrivi a quali condizioni devono sottostare le misure di AB e CD affinché la costruzione sia possibile (affinché il triangolo esista).

Spunti di riflessione: da cosa partiamo?

Nella costruzione precedente sei partito dalla base AB; prova adesso a costruire il triangolo isoscele a partire dal segmento CD considerato come altezza; costruisci su di esso una base congruente ad AB. Descrivi nei dettagli la nuova procedura.

Confronta le due costruzioni e scrivi le tue considerazioni.

Salva il file che hai costruito.



Videata Attività 1

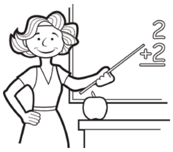
3. Triangoli e mediane[4]

Come per le schede precedenti, lo scopo è costruire triangoli note le lunghezze di alcuni lati; in particolare si chiede di costruire un triangolo note le lunghezze di due lati e della mediana del terzo lato.

[4] Schede di G. Di Caprio e P.G. Laiolo

L'attività è composta da due schede sequenziali: nella prima lo studente viene lasciato libero di agire, esplorare, e arrivare ad una costruzione; nella seconda attività si indica una costruzione basata su un corollario dell'inverso del teorema di Talete. In questo caso lo studente ha la possibilità di *vedere* la messa in atto di teoremi e di simmetrie.

Scheda per il docente



- **Nucleo:** geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Costruire un triangolo con alcuni elementi dati.
- **Ordine di scuola**:
  - o primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività:**

  È richiesto di costruire un triangolo ABC note le misure di due lati e della mediana relativa al terzo lato.

  Vengono proposte due costruzioni: la prima basata sul concetto di luogo geometrico, la seconda su un corollario dell'inverso del teorema di Talete.

  Per entrambe le costruzioni è necessario ricordare la differenza tra *disegnare* e *costruire* un triangolo con determinate caratteristiche. In dettaglio:
  - o nella prima attività si costruisce dapprima un triangolo ABC avente i lati AB e BC congruenti a due segmenti dati. Per imporre anche la congruenza della mediana BS si osserva che in un triangolo ABC, con A variabile su una circonferenza di raggio dato, il luogo dei punti medi del lato AC è ancora una circonferenza avente il centro nel punto medio di BC e raggio uguale alla metà della misura di AB.

    Si individua quindi la corretta posizione del secondo estremo S della mediana BS, in modo che soddisfi la condizione di congruenza ad un segmento dato. Definita la posizione della mediana BS si riposiziona adeguatamente il punto A e si fissa il triangolo ABC;
  - o nella seconda attività si parte dalla costruzione della mediana e si applica il teorema inverso di Talete, ricordando che il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è la metà di esso. I vertici del triangolo sono quindi individuati con simmetrie di centro i punti medi.
- **Indicazioni metodologiche**:

  I ragazzi possono lavorare a coppie o singolarmente. È importante che gli allievi siano lasciati liberi di esplorare e mettere in campo le loro conoscenze anche per controllare la correttezza o meno del loro lavoro. Proprio per questo la scheda non richiede spiegazioni preliminari o particolari accorgimenti da parte del docente.

  Al termine dell'esplorazioni al computer, il docente deve prevedere un momento di discussione, per condividere le costruzione. Tali attività possono essere utilizzate come preludio all'introduzione dei criteri di equivalenza.

- **Tempi**:
  - o 2 ore.

 Schede per lo studente Attività 1, 2.

Esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Costruisci un triangolo dati due lati e la mediana relativa al terzo lato.

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.

In alto a destra della pagina grafica costruisci tre segmenti MP, NQ ed OR: saranno congruenti ai due lati e alla mediana del triangolo.

Segna ora un punto V e con lo strumento *Compasso* costruisci due segmenti VA e VB congruenti a MP e NQ rispettivamente.

Traccia anche il terzo lato del triangolo AB e il suo punto medio C.

Con il *Puntatore* fai variare l'angolo di vertice V, per esempio trascinando il punto A. Prova a ipotizzare quale traiettoria descrive il punto C.

Verifica la tua congettura visualizzando tale traiettoria: attiva la *Traccia* del punto C e muovi A. Osservando attentamente potrai vedere una circonferenza con centro nel punto medio di un lato (quale dei due?) e raggio pari alla metà dell'altro lato.

Costruisci tale circonferenza utilizzando lo strumento *Compasso* e usando come apertura metà del segmento MP.

Intersecando tale circonferenza con la circonferenza di centro V e raggio pari alla mediana si trova il punto S, secondo estremo della mediana VS.

Come puoi completare la costruzione? Inizia col nascondere i segmenti AV e BC.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 2

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia

Prova adesso a realizzare la costruzione della scheda precedente con una procedura alternativa. Utilizzerai il seguente teorema "*Il segmento che unisce i punti medi dei lati di un triangolo è pari alla metà del terzo lato ed è parallelo ad esso*".

Come nella scheda precedente costruisci i tre segmenti MP, NQ e OR che corrispondono ai dati del problema. Individua i punti medi dei segmenti corrispondenti ai lati e chiamali S, T, U.

Questa volta il segmento di partenza sarà la mediana. Crea, dunque, il vertice C del triangolo e con lo strumento *Compasso* costruisci un segmento CD che rappresenti la mediana del terzo lato.

Procedi individuando il punto medio E di uno dei due lati, ad esempio del primo lato. Come puoi procedere per farlo? È qui che entra in gioco il teorema sopra enunciato:

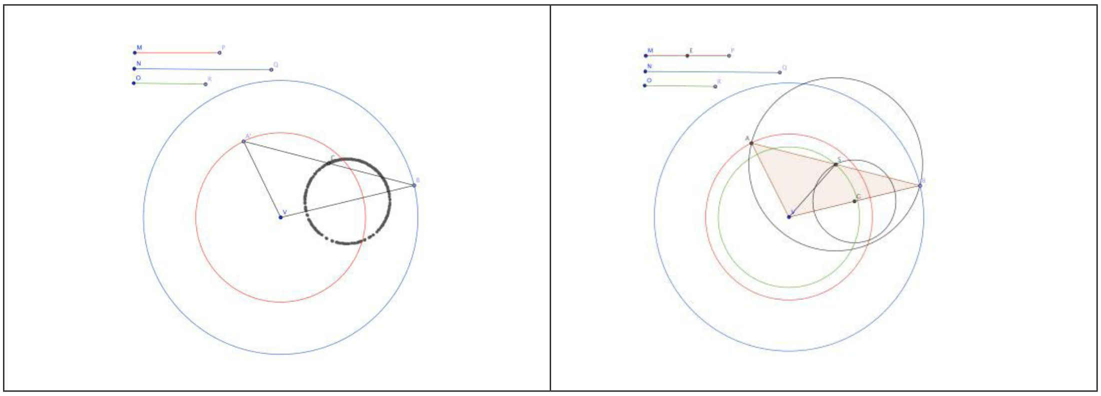
- il segmento DE dovrà essere la metà del secondo lato;
- allo stesso tempo il punto E dovrà dividere in due parti uguali il primo lato.

Ne consegue che il punto E cercato sarà l'intersezione di due circonferenze, rispettivamente:

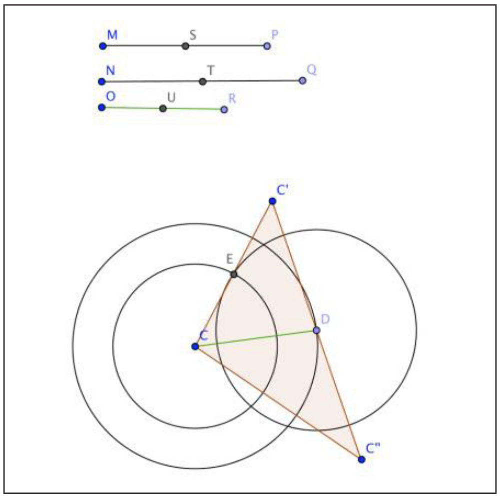
- circonferenza con centro in D e raggio pari a metà del secondo lato;
- circonferenza con centro in C e raggio pari a metà del primo lato.

Conoscendo i punti medi di due lati potrai facilmente individuare i vertici del triangolo utilizzando opportune simmetrie.

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 1

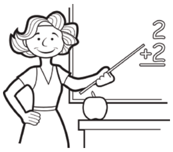


Videata Attività 2

4. Triangoli rettangoli[5]

In questo paragrafo si richiede allo studente di mettere in campo le sue abilità per costruire triangoli rettangoli note le lunghezze di due lati. Rispetto alle precedenti, le schede presentano meno indicazioni tecniche, lasciando maggiormente spazio all'iniziativa personale.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Costruire un triangolo rettangolo con elementi dati.
- **Ordine di scuola**:
  - o Scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:

  Le tre attività rivedono la costruzione di triangoli rettangoli noti alcuni elementi. Vengono proposte costruzioni con ordine crescente di difficoltà.
- **Indicazioni metodologiche**:

  I ragazzi possono lavorare a coppie o singolarmente. Attività di costruzione come queste consentono agli allievi di esplorare i triangoli, di costruirli, deformarli, individuare invarianti. L'insegnante ha l'opportunità di stimolare negli allievi la formulazione di ipotesi e congetture prima di introdurre definizioni e teoremi.

  Come sempre, è consigliabile un momento di condivisione e di istituzionalizzazione successivo.
- **Tempi**:
  - o 2 ore.

 Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Costruisci un triangolo rettangolo noti i due cateti.
Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.

Descrivi nei dettagli la procedura utilizzata; se serve aiutati con il *Protocollo di costruzione.*
Prova a variare la lunghezza dei segmenti di partenza e verifica in quali casi il triangolo esiste e rispetta i vincoli dati.

[5] Schede di G. Di Caprio e P.G. Laiolo

Descrivi eventuali condizioni sui dati affinché la costruzione sia possibile (affinché il triangolo esista).

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 2

Costruisci un triangolo rettangolo, data l'ipotenusa e un cateto.

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.

Descrivi nei dettagli la procedura utilizzata, se serve aiutati con il *Protocollo di costruzione.*

Prova a variare la lunghezza dei segmenti di partenza e verifica in quali casi il triangolo esiste e rispetta i vincoli dati.

Descrivi adesso eventuali condizioni sui dati affinché la costruzione sia possibile (affinché il triangolo esista).

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 3

Costruisci un triangolo rettangolo, data l'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa.

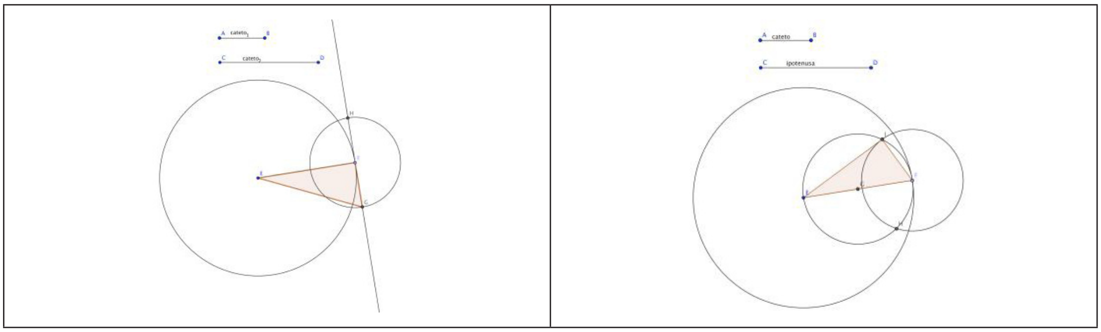
Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.

Descrivi nei dettagli la procedura utilizzata, se serve aiutati con il *Protocollo di costruzione.*

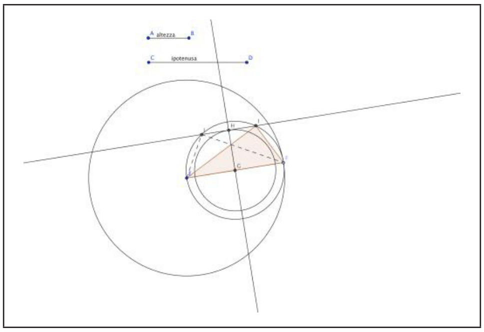
Prova a variare la lunghezza dei segmenti di partenza e verifica in quali casi il triangolo rimane rettangolo e rispetta i vincoli dati.

Descrivi adesso eventuali condizioni sui dati affinché la costruzione sia possibile (affinché il triangolo esista).

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 1 e 2

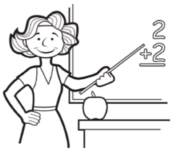


Videata Attività 3

5. L'isola Tondatonda[6]

Una nave di pirati sbarca su un'isola e nasconde il tesoro, bottino dell'ultima rapina. Ora tocca agli allievi ritrovare il tesoro…

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - o Modellizzare e scoprire invarianti.
- **Ordine di scuola**:
  - o Scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:

  L'attività prende spunto da un contesto narrativo. Agli studenti si chiede di individuare la posizione esatta di un tesoro mettendo a punto un modello geometrico con il software.
- **Indicazioni metodologiche**:

  I ragazzi dovrebbero lavorare a coppie o al massimo in gruppi da 3. Durante il lavoro di gruppo, nella fase di ricerca dei ragazzi, si chiede loro di produrre una o più congetture che dovranno poi essere validate. È importante che gli studenti siano lasciati liberi di agire nella ricerca del tesoro, senza che interventi del docente attivino quei condizionamenti dettati principalmente dal contratto didattico.

  Nella discussione successiva si validano e dimostrano le congetture corrette scartando le altre.

[6] Schede di G. Di Caprio e P.G. Laiolo

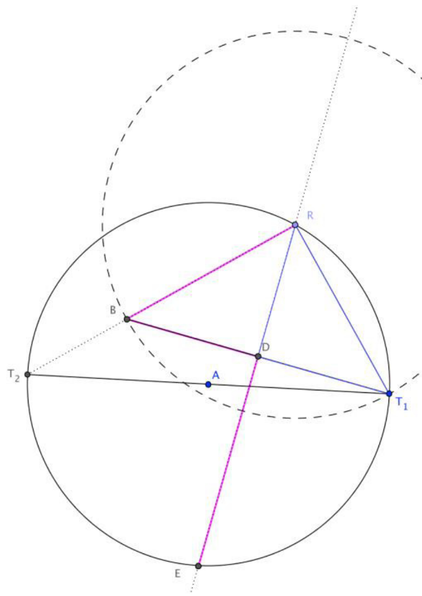
- **Tempi**:
  - o 2-3 ore.

  Scheda per lo studente Attività 1.

  Sono riportati gli esempi più significativi di videate relative ai vari casi.

- **Indicazioni per l'insegnante**:

  La modellizzazione del problema è illustrata in figura.



I punti T_1 e T_2 rappresentano le due torri, A il centro della circonferenza, R il relitto e E il punto dove è nascosto il tesoro.

Il cammino percorso dal primo pirata è la spezzata chiusa RT_1DR, mentre il cammino del secondo pirata è la spezzata RBDE.

Dato che i due pirati hanno uguali velocità, $\overline{TV_1}=\overline{TD}$ e $\overline{DF}=\overline{FV_1}$. Inoltre, l'angolo DTV_1 è retto perché insiste sul diametro V_1V_2.

Osservando che il triangolo BRT_1 è isoscele si deduce che TG è bisettrice dell'angolo DTV_1. Il punto E dovrà allora necessariamente dividere l'arco V_1V_2 in due parti uguali.

È importante osservare che ciò avviene indipendentemente dalla posizione del punto R (la posizione del relitto), a patto che R sia nella stessa semicirconferenza. Viceversa nel caso in cui R si sposti dall'altra parte, il punto E bisecherà la semicirconferenza opposta.

Per riuscire a recuperare il tesoro basterà dunque scavare nei due punti della spiaggia (opposti) equidistanti dalle due torrette.

Gli studenti, esplorando con il software le possibili posizioni del punto R, potranno rendersi conto, ed eventualmente fornirne una dimostrazione, dell'invarianza delle posizioni di E e che dunque non è necessario conoscere la posizione del relitto per ritrovare il tesoro.

Il fatto che la corda V_1V_2 sia un diametro (ossia che l'angolo DTV_1 sia retto) non è rilevante per il problema: il punto E bisecherà comunque l'arco V_1V_2 come conseguenza della bisezione dell'angolo.

Scheda per lo studente Attività 1


Problema

Due pirati sbarcano su una piccola isola completamente deserta e piatta, in corrispondenza di una torretta. Il nome dell'isola è Tondatonda a causa della sua forma pressoché circolare. In lontananza scorgono, in posizione diametralmente opposta, una seconda torretta, identica alla prima.

I due pirati si convincono che Tondatonda è proprio il posto adatto dove nascondere il loro tesoro, un diamante molto prezioso. Essi iniziano a vagare lungo la spiaggia, dove a un certo punto incontrano un relitto e si fermano.

Uno dei due pirati propone allora questa strategia: "Io mi dirigerò in linea retta verso la prima torretta, mentre tu, alla stessa velocità, ti dirigerai verso la seconda. Il primo tra noi che arriverà alla propria torretta darà un segnale e in quel preciso istante ci guarderemo e cominceremo a camminare, sempre in linea retta e alla stessa velocità, l'uno verso l'altro. Quando ci incontreremo svolteremo ad angolo retto e procederemo in direzioni opposte. Dopo un po' uno di noi si ritroverà proprio qui. L'altro invece raggiungerà la spiaggia in un punto diverso, in cui seppellirà il tesoro."

Dopo aver eseguito minuziosamente il piano, i due pirati soddisfatti lasciano l'isola.

Qualche tempo dopo i due pirati ritornano su Tondatonda per recuperare il tesoro, ma purtroppo non trovano più il relitto, rimosso delle frequenti mareggiate.

Come possono ritrovare il tesoro?

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.

Ricostruisci in GeoGebra una sequenza di passaggi che permetta di individuare il punto in cui è sepolto il tesoro.

Giustifica le tue scelte.

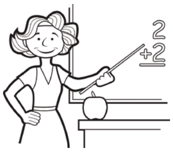
Come cambia il problema se le torrette non sono diametralmente opposte?

Salva il file che hai costruito.

6. Ulteriori costruzioni con i triangoli[7]

Vengono proposte in questo paragrafo ulteriori costruzioni di triangoli, guidate o meno a seconda dei casi

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.

[7] Schede di G. Di Caprio e P.G. Laiolo

- **Obiettivi**:
  - Fare esperienza su costruzioni con il software.
  - Comprendere le relazioni tra i triangoli e le loro caratteristiche.
- **Ordine di scuola**:
  - 3° anno scuola secondaria I grado.
  - primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:

  Eseguire costruzioni geometriche date alcune indicazioni.
- **Indicazioni metodologiche**:

  I ragazzi dovrebbero essere lasciati liberi di manipolare lo strumento informatico al fine di ottenere le costruzioni per tentativi ed errori. In questo modo possono congetturare, controllare, auto correggersi, ma soprattutto prendere dimestichezza con gli oggetti della geometria.

  Al termine delle attività è importante condividere le conoscenze acquisite con una discussione matematica.
- **Tempi**:
  - 1 ora e ½.

Scheda per lo studente

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi e griglia.

Costruisci un triangolo isoscele data la base e l'altezza relativa ad uno dei due lati congruenti.

Costruisci un triangolo rettangolo dati i raggi della circonferenza inscritta e circoscritta.

Costruisci un triangolo note le misure di due lati e dell'angolo compreso.

Costruisci un triangolo note le misure di due angoli e il lato compreso.

Salva il file che hai costruito.

7. Criteri di congruenza dei triangoli[8]

Le costruzioni di triangoli proposte nelle attività precedenti inducono al problema dell'esistenza e unicità di un triangolo soggetto a determinate condizioni, spianando la strada all'introduzione dei criteri di congruenza dei triangoli.

Osserviamo che nei libri di testo non sempre viene chiarito che i criteri di congruenza dei triangoli, al di là del loro uso nella dimostrazione dei teoremi, hanno un significato molto preciso:

[8] Schede di Ada Sargenti

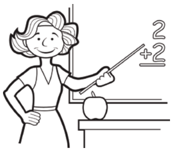
per disegnare un triangolo non è necessario conoscerne tutte le caratteristiche (misure dei tre lati e dei tre angoli) ma ne sono sufficienti tre, prese in modo opportuno.

Quasi mai, inoltre, viene fatto un parallelo tra i criteri di congruenza dei triangoli e i teoremi di trigonometria sui triangoli, come se la geometria sintetica non avesse connessioni con la trigonometria. Proprio questa relazione consente invece di capire quali teoremi applicare e di stabilire se i dati mancanti si possono o meno ricavare in modo univoco.

Infatti:

- il teorema di Carnot è collegato al primo criterio di congruenza (noti due lati e l'angolo compreso trovo il terzo lato) e al terzo (noti i tre lati, posso trovare gli angoli);
- il teorema dei seni è collegato al secondo criterio di congruenza (noto un lato e due angoli, trovo gli altri lati). Il *caso* cosiddetto *ambiguo* fa riferimento alla situazione in cui sono noti due lati e l'angolo non compreso tra essi (si potrebbe chiamare *falso primo criterio*): l'ambiguità nasce dal fatto che questo non è un criterio di congruenza. Infine è chiaro che conoscendo i tre angoli, possiamo determinare i lati a meno di un fattore di proporzionalità, ossia troviamo infiniti triangoli simili, e questo porta a concludere che nemmeno in questo caso si può parlare di criterio di congruenza, ma eventualmente di similitudine.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
  - Far vedere che è possibile in genere costruire il triangolo e trovarne le misure, date le caratteristiche indicate nei criteri di congruenza (due lati e l'angolo compreso, un lato e due angoli, tre lati).
  - Individuare i limiti da imporre ai dati (ad esempio che sia valida la relazione triangolare nel caso del terzo criterio, sia rispettata la regola della somma degli angoli interni).
  - Far constatare che le tre caratteristiche non possono essere qualsiasi perché altrimenti viene meno l'univocità della figura (ad esempio nel caso di due lati e un angolo non compreso).
  - Stabilire un collegamento tra geometria sintetica e trigonometria.
- **Ordine di scuola**:
  - Attività 1: primo e secondo biennio scuola secondaria II grado.
  - Attività 2: primo biennio scuola secondaria II grado.
  - Attività 3: primo e secondo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:
  - Operativamente si può iniziare fornendo alcuni dati agli studenti (Attività 1), chiedendo che venga costruito con riga, compasso, eventualmente goniometro, il triangolo corrispondente a ciascuna tripletta. Sono stati inseriti anche casi di criticità (ad esempio il caso in cui la somma di due lati è minore del terzo).

- Per quel che riguarda il primo biennio, dopo la discussione sui risultati ottenuti, ci possono essere due possibilità:
  a) si fa costruire agli studenti il file per ciascuno dei criteri, provando prima a fare le costruzioni alla lavagna senza GeoGebra;
  b) si fornisce il file predisposto agli studenti, invitandoli a ripercorrere passo passo la costruzione (Protocollo di costruzione) per interpretare come è stata fatta quest'ultima.

  In ogni caso si chiede di (Attività 2):
  - confrontare i risultati ottenuti con carta e penna e quelli derivanti dall'applicazione di GeoGebra,
  - cercare possibili generalizzazioni,
  - giungere alla formulazione dei criteri.
- Per quel che riguarda il secondo biennio, dopo aver discusso sull'Attività 1, chiedendo se le richieste della stessa richiamano proprietà note dal biennio, si possono fornire agli studenti gli stessi file, chiedendo loro (Attività 3) di inserire all'interno le formule di Carnot o del teorema dei seni per visualizzare i risultati. Sarà necessario inserire anche opportuni controlli per evitare segnalazioni di errore nei casi critici.

- **Indicazioni metodologiche**: sebbene i criteri di congruenza precedano sui libri di testo altri teoremi, alcuni di questi ultimi sono noti fin dalla scuola media, come ad esempio quello sulla somma degli angoli interni, quello della disuguaglianza triangolare e il riconoscimento di triangoli simili e quindi possono essere utilizzati già fin dalla prima scheda.

  Nel caso del secondo biennio i teoremi di Carnot e dei seni devono essere noti: l'attività ha come obiettivo la loro applicazione consapevole e il collegamento ai criteri di congruenza.

  Le attività devono essere svolte in piccoli gruppi omogenei di 2 o 3 studenti.

  Si consiglia di non dare tutte le quattro costruzioni presenti nell'Attività 1 a tutti gli studenti, ma di dare ad ogni gruppo una sola costruzione. La discussione che ne seguirà avrà lo scopo di far conoscere a tutta la classe le scoperte avvenute nel piccolo gruppo, formalizzandole.

  Anche per l'Attività 2 ogni gruppo lavorerà su un singolo file, dato a caso, cercando di rispondere alle domande della scheda che hanno lo scopo di attivare negli studenti i processi di scoperta per riconoscere le costruzioni prima viste con carta e matita.

  In questi casi sono di fondamentale importanza le discussioni e le condivisioni dei saperi costruiti nei gruppi al termine di ogni attività, mentre spetta al docente orchestrare la discussione.

  L'Attività 3, come già detto, è prevista solo per il secondo biennio.

- **Tempi**:
  - Attività 1: 1 ora (compresa la discussione)
  - Attività 2: 2 ore più un'ora di discussione
  - Attività 3: 1 ora più un'ora di discussione

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Esempi di videate relative ai vari casi.

Protocolli di costruzione. (Le istruzioni inserite in ciascun protocollo di costruzione devono essere lette in ordine verticale).

Protocollo di costruzione primo criterio di congruenza

N.	Nome	Icona	Definizione
1	Punto H		
2	Punto D		
3	Numero r		
4	Circonferenza p		Circonferenza [D, r]
5	Punto F		Punto [p]
6	Angolo γ_1		Angolo [F, D, H]
7	Segmento l		Segmento [F, D]
8	Segmento m		Segmento [D, H]
9	Numero b		
10	Numero a		
11	Punto C		Circonferenza [D, r]

N.	Nome	Icona	Definizione
12	Circonferenza e		Circonferenza [C, b]
13	Punto I		Intersezione [e, asseX]
14	Punto A		Intersezione [e, asseX]
15	Segmento f		Segmento [C, A]
16	Punto A'		Ruota [A, γ_1 C]
17	Angolo γ		Angolo [A, C, A']
18	Semiretta g		Semiretta [C, A']
19	Circonferenza h		Circonferenza [C, a]
20	Punto B		Intersezione [h, g]
21	Segmento i		Segmento [C, B]
22	Segmento j		Segmento [B, A]

Protocollo di costruzione primo falso criterio

N.	Nome	Icona	Definizione
1	Numero a		
2	Numero b		
3	Punto K		

N.	Nome	Icona	Definizione
15	Punto F		Punto di intersezione tra f e g
16	Segmento h		Segmento [C, D]
17	Punto C'		C ruotato di un angolo -α

4	Punto B		
5	Punto H		
6	Angolo α		Angolo tra K, B, H
7	Segmento c		Segmento [K, B]
8	Segmento d		Segmento [B, H]
9	Punto C		
10	Circonferenza e		Circonferenza di centro C e raggio a
11	Circonferenza f		Circonferenza di centro C e raggio b
12	Punto J		
13	Semiretta g		Semiretta per C e J
14	Punto D		Punto di intersezione tra f e g
18	Angolo α_1		Angolo tra C’, D, C
19	Semiretta i		Semiretta per D e C’
20	Punto A		Punto di intersezione tra e e i
21	Punto E		Punto di intersezione tra e e i
22	Segmento j		Segmento [C, E]
23	Segmento k		Segmento [C, A]
24	Segmento l		Segmento [E, D]
25	Numero β		arcsen(b / a sen(α_1))/ °
26	Angolo β_1		180° - β°
27	Testo testo3	ABC	“β1= “ + β_1
28	Testo testo5	ABC	“α+β1 = “ + (β_1+ α_1)
29	Segmento m		Segmento [A, D]

Protocollo di costruzione del secondo criterio

N.	Nome	Icona	Definizione
1	Numero c	a = 2	
2	Punto L		
3	Punto J		
15	Segmento l		Segmento [I, G]
16	Punto A		
17	Punto B		Punto [Circonferenza [A, c]]

4	Circonferenza p		Circonferenza [J, 2]
5	Punto K		Punto [p]
6	Angolo β_1		Angolo [K, J, L]
7	Segmento a		Segmento [J, K]
8	Segmento b		Segmento [J, L]
9	Punto I		
10	Punto G		
11	Circonferenza e		Circonferenza [G, 2]
12	Punto H		Punto [e]
13	Angolo α_1		Angolo [H, G, I]
14	Segmento k		Segmento [H, G]

18	Segmento d		Segmento [A, B]
19	Punto B'		Ruota [B, α_1, A]
20	Semiretta f		Semiretta [A, B']
21	Punto A'		Ruota[A, -β_1, B]
22	Semiretta g		Semiretta [B, A']
23	Angolo α		Angolo [B, A, B']
24	Angolo β		Angolo [A', B, A]
25	Punto C		Intersezione [g, f]
26	Segmento h		Segmento [A, C]
27	Segmento i		Segmento [B, C]

Protocollo di costruzione del secondo criterio bis

N.	Nome	Icona	Definizione
1	Punto G		
2	Circonferenza e		Circonferenza [G, 2]
3	Punto H		Punto [e]
4	Punto I		

N.	Nome	Icona	Definizione
19	Punto A		
20	Punto Q		
21	Punto S		
22	Punto D		

5	Angolo α_1		Angolo [H, G, I]
6	Segmento k		Segmento [H, G]
7	Segmento l		Segmento [I, G]
8	Punto J		
9	Circonferenza p		Circonferenza [J, 2]
10	Punto K		Punto [p]
11	Punto L		
12	Angolo γ_1		Angolo [K, J, L]
13	Segmento a		Segmento [J, K]
14	Segmento b		Segmento [J, L]
15	Numero c	a = 2	
16	Angolo β_1		180° - $\alpha_1 - \gamma_1$
17	Testo testo5		“La somma dei due angoli vale “ + (α_1+ γ_1)
18	Testo testo6		“Il terzo angolo β vale quindi “ + β_1
23	Punto F		
24	Punto B		Punto [Circonferenza [A, c]]
25	Segmento f		Segmento [A, B]
26	Punto B’		Ruota [B, α_1, A]
27	Angolo α		Angolo [B, A, B’]
28	Semiretta g		Semiretta [A, B’]
29	Punto A’β		Ruota [A, -$\beta_{1,}$,B]
30	Angolo β		Angolo [A’β, B, A]
31	Semiretta h		Semiretta [B, A’β]
32	Punto C		Intersezione [h, g]
33	Segmento i		Segmento [A, C]
34	Segmento j		Segmento [C, B]
35	Angolo γ		Angolo [A, C, B]

Protocollo di costruzione terzo criterio

N.	Nome	Icona	Definizione
1	Punto M		
9	Segmento c		Segmento [R, S]

2	Punto N		
3	Segmento a		Segmento [M, N]
4	Punto P		
5	Punto Q		
6	Segmento b		Segmento [P, Q]
7	Punto R		
8	Punto S		

10	Punto A		
11	Punto B		Punto su Circonferenza [A, Distanza [M, N]]
12	Segmento d		Segmento [A, B]
13	Circonferenza e		Circonferenza di centro A e raggio c
14	Circonferenza f		Circonferenza di centro B e raggio b
15	Punto C		Punto di intersezione tra e e f
16	Triangolo poli1		Poligono A, C, B

Protocollo di costruzione caso due angoli

N.	Nome	Icona	Definizione
1	Punto G		
2	Punto H		
3	Punto I		
4	Angolo α		Angolo tra G, H, I
5	Segmento a		Segmento [H, I]
6	Segmento b		Segmento [H, G]
7	Punto D		

N.	Nome	Icona	Definizione
13	Punto A		
14	Punto R		
15	Semiretta e		Semiretta per A e R
16	Punto R’		R ruotato di un angolo α
17	Angolo γ		Angolo tra R, A, R’
18	Semiretta f		Semiretta per A e R’
19	Punto B		Punto su e

8	Punto E		
9	Punto F		
10	Angolo β		Angolo tra D, E, F
11	Segmento c		Segmento [D, E]
12	Segmento d		Segmento [E, F]

20	Punto A’		A ruotato di un angolo -β
21	Angolo δ		Angolo tra A’, B, A
22	Semiretta g		Semiretta per B e A’
23	Punto C		Punto di intersezione tra g e f
24	Triangolo poli1		Poligono A, B, C

Scheda per lo studente Attività 1

PARTE A

Prova a disegnare il triangolo ABC conoscendo i dati indicati, eventualmente scegliendo un’opportuna scala per i lati. Utilizza righello, compasso, goniometro per la costruzione.

Come vedi ti vengono assegnati 3 dati tra i 6 possibili (3 lati e 3 angoli). Riesci a disegnare il triangolo? Il risultato è univoco? Commenta i risultati ottenuti.

Caso I Misura approssimativamente, se possibile, la lunghezza di AB dopo aver disegnato:

a. Il triangolo ABC noti $\overline{BC} = 3\ cm$, $\overline{AC} = 5\ cm$, l’angolo $\hat{C} = 20°$.

Caso I bis Misura approssimativamente la lunghezza di AB dopo aver disegnato, se possibile:

b. il triangolo ABC sapendo che $\overline{BC} = 3\ cm$, $\overline{AC} = 5\ cm$, l’angolo $\hat{A} = 20°$.

c. il triangolo ABC sapendo che $\overline{BC} = 6\ cm$, $\overline{AC} = 5\ cm$, l’angolo $\hat{A} = 20°$.

d. il triangolo ABC sapendo che $\overline{BC} = 1\ cm$, $\overline{AC} = 5\ cm$, l’angolo $\hat{A} = 20°$.

Quale differenza tra i dati riscontri tra il caso I e il caso I bis? Quale differenza tra i risultati?

PARTE B

Prova a disegnare il triangolo ABC conoscendo i dati indicati, eventualmente scegliendo un’opportuna scala per i lati. Utilizza righello, compasso, goniometro per la costruzione.

Come vedi ti vengono assegnati 3 dati tra i 6 possibili (3 lati e 3 angoli). Riesci a disegnare il triangolo? Il risultato è univoco? Commenta i risultati ottenuti.

Caso I Misura approssimativamente la lunghezza di AC e BC, dopo aver disegnato se possibile:

a. Il triangolo ABC noti: $\overline{AB} = 5\ cm$, l’angolo $\hat{A} = 20°$ e l’angolo $\hat{B} = 40°$.

b. Il triangolo ABC noti: $\overline{AB} = 5\ cm$, l’angolo $\hat{A} = 120°$ e l’angolo $\hat{B} = 80°$.

Quale differenza riscontri tra i casi a e b? Perché?

Caso I bis Misura approssimativamente la lunghezza di AC e BC, dopo aver disegnato se possibile:

a. Il triangolo ABC noti: $\overline{AB} = 5\ cm$, l'angolo $\hat{A} = 20°$ e l'angolo $\hat{C} = 40°$.

Quale differenza tra i dati riscontri tra il caso I a e il caso I bis a?

PARTE C

Prova a disegnare il triangolo ABC conoscendo i dati indicati, eventualmente scegliendo un'opportuna scala per i lati. Utilizza righello, compasso, goniometro per la costruzione.

Come vedi ti vengono assegnati 3 dati tra i 6 possibili (3 lati e 3 angoli). Riesci a disegnare il triangolo? Il risultato è univoco? Commenta i risultati ottenuti.

Individua approssimativamente la misura di due angoli, dopo aver disegnato se possibile:

a. il triangolo ABC sapendo che $\overline{AB} = 3\ m$, $\overline{AC} = 5\ m$, $\overline{BC} = 6\ m$.

b. il triangolo ABC sapendo che $\overline{AB} = 3\ m$, $\overline{AC} = 5\ m$, $\overline{BC} = 1\ m$.

Quale differenza riscontri tra i casi a e b? Perché?

PARTE D

Prova a disegnare il triangolo ABC conoscendo i dati indicati, eventualmente scegliendo un'opportuna scala per i lati. Utilizza righello, compasso, goniometro per la costruzione.

Come vedi ti vengono assegnati 3 dati tra i 6 possibili (3 lati e 3 angoli). Riesci a disegnare il triangolo? Il risultato è univoco? Commenta i risultati ottenuti.

Disegna un triangolo ABC noti: $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 50°$ e quindi $\hat{C} = 100°$.

Sei in grado di determinare *univocamente* la misura dei lati?

I dati assegnati sono effettivamente 3? Puoi cioè scegliere 3 angoli a piacere o ci sono vincoli? Dopo aver costruito $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, come si costruiscono i lati? Quindi in che cosa differisce questo caso dai precedenti?

Scheda per lo studente Attività 2

Apri il file che ti viene fornito dal docente.

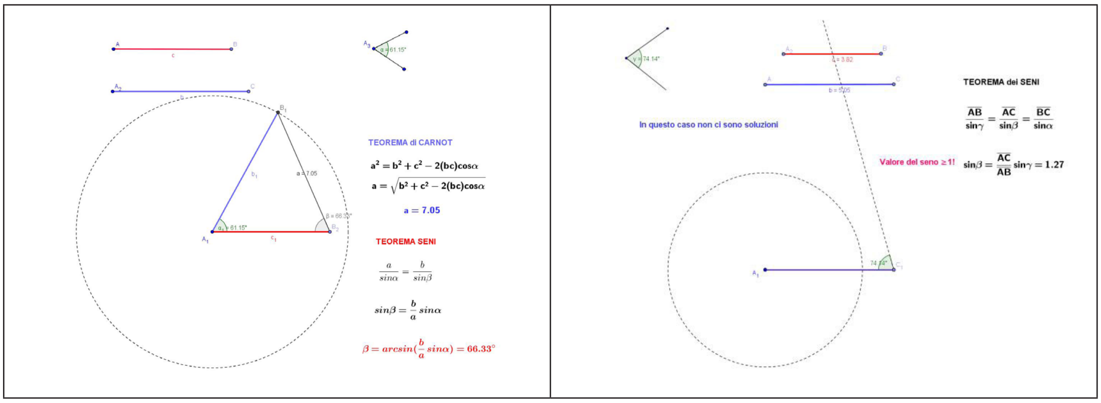
Utilizza la *ricostruzione passo passo* (Barra di navigazione attiva) per comprendere come puoi costruire il triangolo con riga e compasso.

Subito dopo modifica gli oggetti geometrici che rappresentano lati e angoli dati, trascinando gli estremi dei segmenti e variandone le misure.

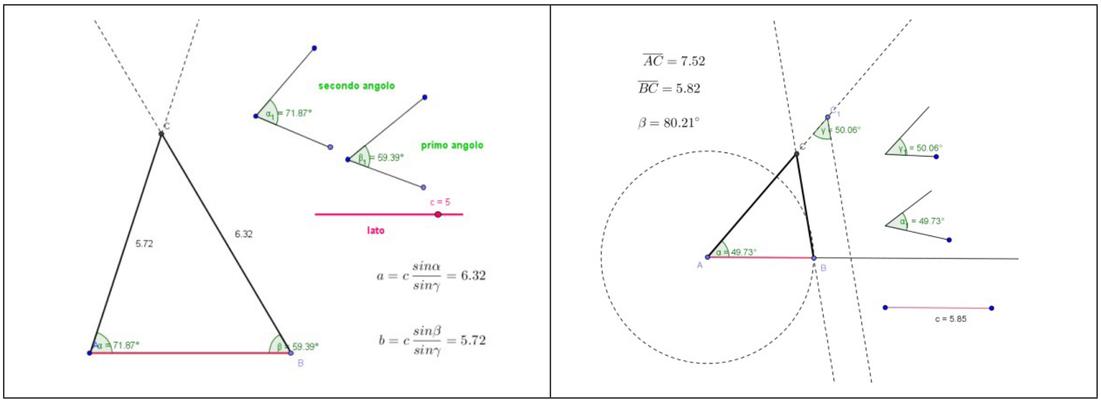
Rispondi quindi alle seguenti domande:

- Come è stato costruito il triangolo?
- Descrivi quali sono i dati noti del triangolo.

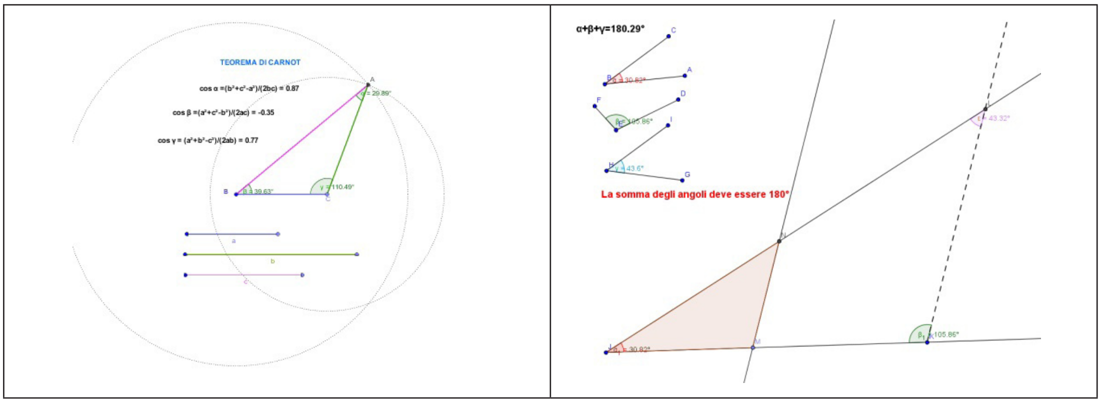
- Descrivi come costruire il triangolo con riga e compasso.
- Puoi modificare i lati a piacimento? Quali? Ottieni sempre un triangolo? Uno solo o più di uno?
- Puoi modificare gli angoli a piacimento? Quali? Perché?
- Fissando gli oggetti iniziali puoi costruire un triangolo solo? Perché?



Videate Attività 1 e 3 Parte A Caso I e Caso I bis



Videate Attività 1 e 3 Parte B Caso II e Caso II bis



Videate Attività 1 e 3 Parte C e D

Scheda per lo studente Attività 3


Utilizza i file che ti vengono indicati dal docente; essi fanno riferimento ai vari casi dell'Attività 1.

Per ciascuno utilizza la *ricostruzione passo passo* (Barra di navigazione attiva) per comprendere come puoi costruire il triangolo con riga e compasso. Associa, quando possibile, a ciascun file l'eventuale criterio di congruenza a cui si fa riferimento. Subito dopo, per ciascuno puoi modificare gli oggetti geometrici che rappresentano lati e angoli dati, trascinando gli estremi dei segmenti. Fai in modo che le misure coincidano con quelle dei dati dell'attività precedente e verifica se i risultati corrispondono a quanto hai trovato con carta e penna.

Per ognuno dei file:

- introduci le formule dei teoremi trigonometrici che ti consentono di trovare le misure degli elementi non noti;
- inserisci quindi un testo dinamico che visualizzi i risultati delle formule;
- controlla nella Vista Algebra che i risultati siano corretti (ovvero che corrispondano effettivamente alle misure degli oggetti costruiti);
- inserisci controlli per i casi critici, in modo che non compaiano scritte tipo "non definito", ma scompaia il risultato e venga segnalato perché non c'è la soluzione.

Salva di volta in volta il file che hai costruito.

CAPITOLO 3

Costruzioni dinamiche e didattica della geometria

Introduzione

Sono proposte in questo capitolo attività che riguardano alcune proprietà fondamentali di poligoni (triangoli e quadrilateri), analizzate principalmente attraverso gli strumenti della geometria sintetica. La metodologia suggerita è prevalentemente quella della scoperta guidata: attraverso GeoGebra e le sue possibilità di esplorazione dinamica, lo studente è indirizzato verso la formulazione di ipotesi che devono però trovare giustificazioni logiche, per giungere quindi a proprietà e teoremi. Questi pertanto non vengono proposti dal docente a priori, ma è lo studente che li scopre facendoli dunque propri.

Per quanto riguarda i triangoli sono presentati problemi relativi ai punti notevoli. In genere baricentro, ortocentro, incentro, circocentro di un triangolo appaiono agli studenti come qualcosa di oscuro, di cui non si comprende il senso e le possibili applicazioni. Pertanto si propone di affrontarli in alcuni casi attraverso problemi e comunque tutti come costruzione con scoperta delle proprietà.

Anche per quel che riguarda i quadrilateri si è scelto un approccio per costruzioni che mettano in evidenza le caratteristiche di vari quadrilateri particolari, puntando anche l'attenzione sull'importanza della loro definizione. Infatti l'uso del software, ed in particolare il trascinamento, consente di scoprire casi non facilmente evidenziabili con carta e penna, portando all'esigenza di definizioni più rigorose che escludano situazioni "indesiderate".

Riferimenti alle indicazioni ministeriali

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

- L'alunno riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.
- Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.
- Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...).

Riferimenti alle Indicazioni ministeriali e alle Linee guida per il biennio della scuola secondaria

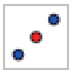
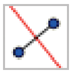
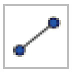
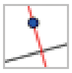
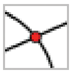
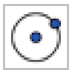
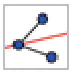
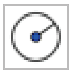
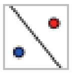
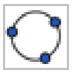
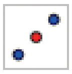
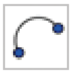
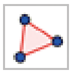
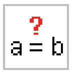
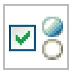
- Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.
- Lo studente apprenderà i principi matematici di base coinvolti nelle diverse tecniche di rappresentazione delle figure dello spazio e le relazioni tra di essi e le tecniche in uso nelle discipline grafiche e geometriche (*Indicazioni nazionali per i Licei*).

Lo studente apprenderà a:

- confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni;
- analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*).

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*	*Strumenti*	*Icone*
Punto medio o centro		Asse di un segmento	
Segmento -tra due punti		Retta perpendicolare	
Intersezione di due oggetti		Circonferenza-dati il centro e un punto	
Bisettrice		Circonferenza-dati centro e raggio	
Simmetria assiale		Circonferenza - per tre punti	
Simmetria centrale		Semicirconferenza- per due punti	
Poligono		Inserisci testo	
Relazione fra due oggetti		Casella di controllo per mostrare/ nascondere oggetti	

Menu di GeoGebra:

Barra di inserimento	Menu principale *Visualizza* (selezionare/deselezionare)
Protocollo di costruzione	Menu principale *Visualizza* (selezionare/deselezionare)
Vista Grafica	Tasto destro mouse in una parte vuota della pagina *Assi* (selezionare/deselezionare) *Barra di navigazione* (selezionare/deselezionare)

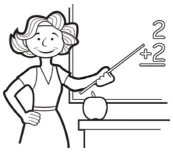
Proprietà	Menu Modifica o Tasto destro mouse sull'oggetto Proprietà *Colore* (selezionare) *Stile* (selezionare) *Rinomina* (selezionare/deselezionare) *Avanzate*/Condizione per mostrare l'oggetto
Vista Algebra	Menu/ *Visualizza*

1. Punti notevoli di un triangolo[1]

In questo paragrafo lo studente costruisce i punti notevoli del triangolo, scoprendo, proprio attraverso la costruzione ed il successivo trascinamento, le loro proprietà. Alla fine dovrà essere in grado di definire ciascun punto notevole, mettendone in evidenza le caratteristiche.

Due dei punti notevoli (baricentro e circocentro) sono introdotti da due esercitazioni pratiche legate a oggetti da manipolare, che preparano alla successiva costruzione con GeoGebra. Questo per togliere l'impressione che la ricerca di questi punti sia un "gioco" fine a se stesso, ma che al contrario il loro utilizzo trova applicazioni nella realtà.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**:
    - o Saper determinare circocentro, incentro, baricentro, ortocentro.
    - o Conoscere le proprietà dei punti notevoli.
- **Ordine di scuola**:
    - o primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:
    - o Attività 1: si suggerisce di introdurre la costruzione del baricentro attraverso una attività volta alla ricerca del punto di equilibrio di un triangolo. Alla fine dell'attività è opportuna una discussione collettiva su quanto scoperto.
    - o Attività 2: da dare dopo la discussione come momento per sistematizzare i concetti.
    - o Attività 3: costruzione con GeoGebra del baricentro e scoperta delle sue proprietà geometriche.
    - o Attività 4: costruzione con GeoGebra dell'ortocentro e scoperta delle sue proprietà.

[1] Schede di riferimento: sperimentazione N. Pescarmona

- o Attività 5: viene proposto un problema per l'illuminazione di un parco che porta alla circonferenza circoscritta ad un triangolo. Il problema era inserito nelle prove rilasciate OCSE-PISA 2003.
- o Attività 6: costruzione con GeoGebra del circocentro e scoperta delle sue proprietà.
- o Attività 7: costruzione con GeoGebra dell'incentro e scoperta delle sue proprietà.

- **Indicazioni metodologiche**: prerequisito di queste attività è sapere cosa sono altezza, mediana, asse, bisettrice, circonferenza (inscritta e circoscritta), oltre a conoscere la classificazione dei triangoli in base a lati ed angoli.

  Le due proposte di lavoro dovrebbero prevedere una discussione matematica (di bilancio) in classe per giungere a considerazioni condivise su cui basare le successive costruzioni con GeoGebra.

  Le attività con il software possono anche essere svolte in piccoli gruppi (2/3 studenti). Si alternano momenti di utilizzo del software a lavoro con carta e penna.

  Si richiede di descrivere per iscritto cosa si osserva, inquadrandolo e motivandolo geometricamente.

  Sarà cura del docente operare una sintesi sul lavoro sistematizzando il sapere appreso e riportato per iscritto.

- **Tempi**:
  - o Attività 1-7: 40 minuti ciascuna.


Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Per ogni attività sono riportati esempi di videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Ritaglia su un cartoncino rigido un triangolo. Prendi una catenella (o un cordino pesante) che abbia un anello ad una estremità. Appendi un piccolo peso all'altra estremità.

Su un piano di legno verticale appendi con un chiodino il triangolo in uno dei vertici. Nello stesso chiodino inserisci l'occhiello della catenella. Il triangolo si è disposto con la base parallela al terreno? Il triangolo è in equilibrio? Riporta sul triangolo la traccia della catenella, dal vertice fino al lato opposto.

Ripeti lo stesso procedimento per gli altri due vertici.

Come sono tra loro le tracce della catenella?

Usa un righello graduato per controllare se i punti in cui la catenella incontrava i lati sono o meno punti particolari.

Scheda per lo studente Attività 2

Correggi eventuali imperfezioni della costruzione (i segmenti dovrebbero essere le tre mediane e dovrebbero incontrarsi in un punto).

Determina quindi in modo corretto la posizione del punto di incontro, infila la punta di un chiodo con la testa larga e piatta in quest'ultimo e appoggia la testa del chiodo stesso su un piano orizzontale: cosa osservi? Prova ora ad inserire il chiodo in qualche altro punto qualsiasi del triangolo: succede ancora la stessa cosa?

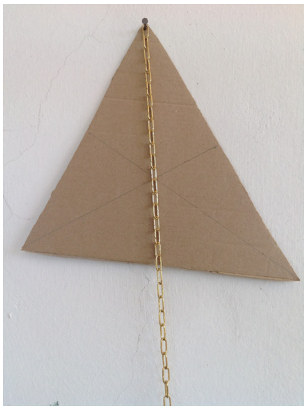
Se la costruzione è stata fatta correttamente, il chiodo sostiene il triangolo solo quando è posizionato nel punto di incontro delle mediane, che determina quindi la posizione di equilibrio del triangolo. Sai dare una spiegazione di questo fatto? (pensa a come è stato costruito il punto). In fisica questo punto particolare si chiama *baricentro*.

Scheda per lo studente Attività 3


Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi cartesiani e senza barra di inserimento.
Disegna un generico triangolo ABC.
Determina quindi i punti medi dei lati del triangolo ABC.
Rinomina con M il punto medio di AB, N il punto medio di BC, L il punto medio di CA.
Traccia le tre mediane del triangolo.
Considera ora le intersezioni di queste mediane a due a due: la mediana relativa al lato AB con la mediana relativa al lato BC, quindi quest'ultima con la mediana relativa al lato AC, ed infine quest'ultima con quella relativa ad AB. Che cosa osservi per i tre punti di intersezione?
Prova a muovere i vertici del triangolo per modificarlo. I tre punti di intersezione mantengono qualche proprietà invariata?
Indica con G questo punto comune: nel seguito verrà chiamato BARICENTRO.
Cerca ora qualche proprietà geometrica aggiuntiva di questo punto.
Rispetto al triangolo l'intersezione G si trova:

a) se ABC è acutangolo	- internamente	- esternamente	- sul bordo?
b) se ABC è ottusangolo	- internamente	- esternamente	- sul bordo?
c) se ABC è rettangolo	- internamente	- esternamente	- sul bordo?

Ricordando quanto fatto nell'Attività 1, puoi ipotizzare che qualche volta il baricentro sia esterno o su un lato? Spiega il motivo.
Unisci i punti L ed N. Osservando la figura che cosa puoi affermare del segmento LN rispetto al lato AB e rispetto al segmento AM?
Traccia la circonferenza di centro G e passante per N. Indica l'intersezione di questa circonferenza con il segmento AN con la lettera P.
Traccia una circonferenza di centro P e passante per G. Quest'ultima circonferenza passa anche per il punto A? C'è qualche relazione tra AG e GN?
Modifica il triangolo trascinando i vertici. L'ultima relazione scoperta si mantiene al trascinamento? Puoi allora ipotizzare che il punto G divide la mediana in due parti tali che ………………………………………………
Rispetto alle altre due mediane, il baricentro mantiene questa proprietà? Puoi verificarlo?
Scrivi ora una definizione di baricentro, che indichi che cosa è, dettagliando anche le proprietà che hai scoperto.
Salva il file che hai costruito.



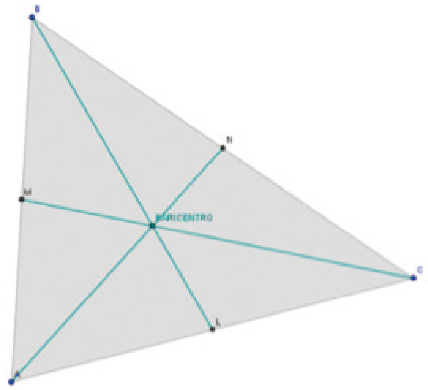


Foto Attività 1 e Videata Attività 3

Scheda per lo studente Attività 4

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi cartesiani e senza barra di inserimento. Disegna un generico triangolo ABC.

Disegna le tre rette condotte da un vertice e perpendicolari al lato opposto: retta per C perpendicolare ad AB; retta per A perpendicolare a BC; retta per B perpendicolare a CA.Trova l'intersezione di ciascuna retta con il lato corrispondente nella costruzione. Congiungi ciascuno di questi punti sui lati con il vertice opposto.

Che cosa sono i segmenti trovati?

Usa la finestra di dialogo *Proprietà* per tratteggiare le rette e per colorare di rosso i segmenti che hai costruito.

Osserva che questi segmenti sono le altezze del triangolo; intersecale a due a due. Cosa puoi dire sulle tre intersezioni trovate?

Muovi i vertici per verificare se per ogni triangolo che si viene a formare esiste un unico punto di intersezione delle tre altezze (indicalo con O). Il punto trovato prende il nome di ORTOCENTRO.

Muovi i vertici nuovamente:

a) Fai in modo che l'intersezione O sia esterna al triangolo: come puoi definire il triangolo in questo caso?
b) Fai in modo che l'intersezione O coincida con il vertice A: come può definire il triangolo ABC?
c) E se O coincide con il vertice B?
d) E se O coincide con C?
e) Che tipo di triangolo è ABC se l'intersezione O è interna al triangolo?
f) Disegna l'asse di AB. Quale triangolo si forma se il punto O appartiene all'asse di AB?

Scrivi ora una definizione di ortocentro, che indichi che cosa è, dettagliando anche le proprietà che hai scoperto.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 5

Il problema del lampione nel parco

Il Consiglio Comunale di un Cittadina ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l'intero parco ne sia illuminato.

Dove dovrebbe essere collocato il lampione?

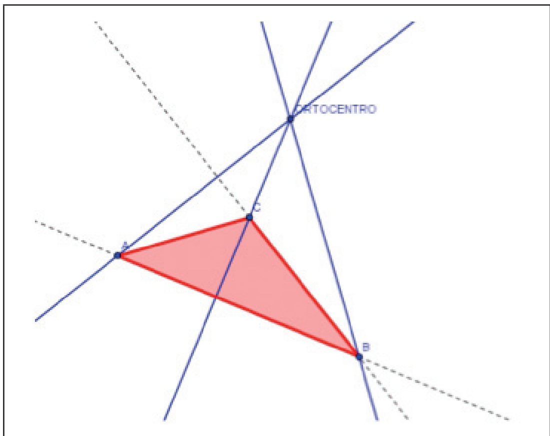
Discuti con i tuoi compagni la situazione proposta, tenendo presente che si tratta di una situazione reale per la quale:

- occorre localizzare il punto di un parco in cui mettere un lampione;
- il lampione deve illuminare tutti i punti del parco.

Il parco può essere rappresentato come un triangolo e l'illuminazione del lampione come un cerchio con il lampione al suo centro. Prova a fare una "simulazione" della situazione disegnando triangolo e cerchio. Puoi anche simulare materialmente la situazione sostituendo alla circonferenza l'area luminosa di una "pila" in modo da rendere più visibile la situazione proposta.

Quanto deve essere grande il cerchio che rappresenta l'illuminazione? A quali caratteristiche deve rispondere?

Il punto in cui collocare il lampione deve quindi essere ....



Videata Attività 4 e Foto Attività 5

Scheda per lo studente Attività 6

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi cartesiani e senza barra di inserimento.

Disegna un generico triangolo ABC.

Disegna gli assi dei tre lati del triangolo.

Cerca le intersezioni degli assi a due a due. Cosa puoi dire sulle tre intersezioni trovate?

Muovi il vertice C e gli altri vertici per verificare se per ogni triangolo che si viene a formare esiste un unico punto di intersezione fra gli assi (indicalo con D).

a) Come si può definire il triangolo se l'intersezione è esterna al triangolo stesso?

b) Che tipo di triangolo è ABC se l'intersezione appartiene ad uno dei lati del triangolo?

c) Che tipo di triangolo è ABC se l'intersezione è interna al triangolo?

Congiungi ora D con i vertici del triangolo. Confronta tali distanze: cosa osservi? Perché? (ricorda che l'asse è il luogo di punti …)

Disegna la circonferenza che passa per tutti e tre i vertici del triangolo (*Circonferenza per tre punti*).

Osserva ora il disegno: questa circonferenza ha centro nel punto …. e raggio …. (verificalo: *Circonferenza* dati centro e raggio. Le due circonferenze coincidono?)

Puoi anche dire che la circonferenza è …. al triangolo.

Il punto D viene chiamato CIRCOCENTRO.

Scrivi allora una definizione di circocentro, che indichi che cosa è, dettagliando anche le proprietà che hai scoperto.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 7

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi cartesiani e senza barra di inserimento.

Disegna un generico triangolo ABC.

Disegna le bisettrici dei tre angoli del triangolo.

Cerca le intersezioni delle bisettrici a due a due. Cosa puoi dire sulle tre intersezioni trovate?

Indica con I il punto comune trovato.

Disegna ora le tre rette perpendicolari ai tre lati condotte per il punto I.

Indica con E, F, D i punti di intersezione delle rette con i lati del triangolo.

Traccia i segmenti IE, IF, ID. Che cosa rappresentano? Confrontali: che cosa osservi? Perché (ricorda che la bisettrice è il luogo di punti …)?

Traccia la circonferenza che passa per i tre punti E, F, D.

Osserva ora il disegno: questa circonferenza ha centro nel punto …. e raggio …. (verificalo: *Circonferenza* dati centro e raggio. Le due circonferenze coincidono?)

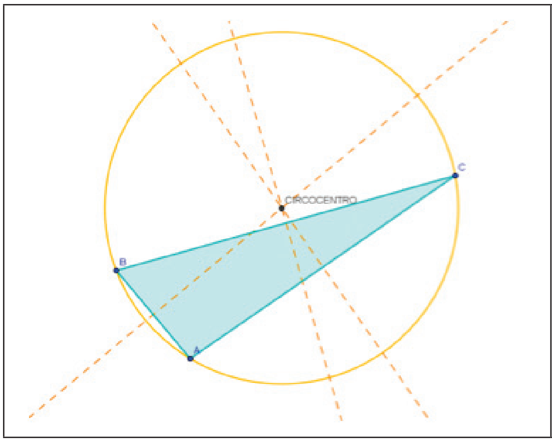
Puoi anche dire che la circonferenza è …. al triangolo.

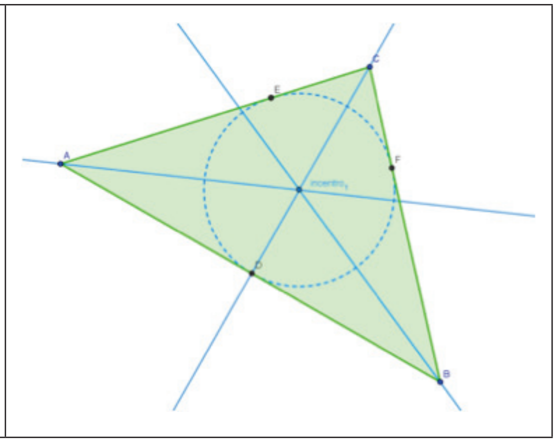
Modifica con il trascinamento il triangolo, e quindi prendi successivamente in considerazione il caso del triangolo ottusangolo, dell'acutangolo e del triangolo rettangolo: il punto I appartiene talvolta ad uno dei lati del triangolo? Il punto I può essere esterno al triangolo? Perché?

Il punto I viene chiamato INCENTRO.

Scrivi allora una definizione di incentro, che indichi che cosa è, dettagliando anche le proprietà che hai scoperto.

Salva il file che hai costruito.





Videate Attività 6 e 7

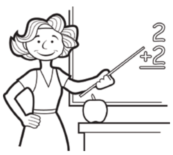
2. Alla scoperta dei quadrilateri[2]

Le caratteristiche dei poligoni nascono da come li costruisco. Questa frase sintetizza in qualche modo la metodologia di questo paragrafo il cui percorso prevede nelle prime attività le trasformazioni geometriche come fondamento della costruzione della geometria (la simmetria come *generatrice* di oggetti che mantengono le lunghezze, gli angoli ed il parallelismo e come *base* che determina le altre isometrie per composizioni). Si costruiscono così i quadrilateri ponendo le condizioni di partenza per poi analizzare man mano le caratteristiche che ne emergono necessariamente. Ciò che si raggiunge diviene conoscenza conquistata e razionalmente motivata.

La terza attività pone molti spunti per parlare di poligoni equivalenti e per costruirli originalmente con un lavoro individuale o collettivo.

Infine la seconda e la quarta attività portano a scoperte assolutamente inaspettate operando solo con carta e penna. Infatti il trascinamento porta ad evidenziare un quadrilatero intrecciato nella quarta attività, mentre nella seconda attività si generano anche quadrilateri non convessi.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**: Alcune proprietà dei quadrilateri fondamentali.
    - o Rombi e quadrati (Attività 1).
    - o Parallelogrammi, rettangoli e … (Attività 2).
    - o Da un quadrilatero ad un triangolo equivalente (Attività 3).
    - o Trapezi e altri quadrilateri (Attività 4).

[2] Attività 1, 2, 3 ispirate alle lezioni di M. Cantoni, attività 4 ispirata ad un seminario di E. Gallo.

- **Ordine di scuola**:
  - scuola secondaria I grado;
  - primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:
  - Attività 1: a partire da un segmento di riferimento, si chiede di costruire un quadrilatero con i quattro lati ad esso congruenti. Per far questo si parte da un triangolo isoscele (AB = BC), sul quale si opera con le trasformazioni costruendo il suo simmetrico rispetto ad AC. Il quadrilatero ABCB' risponde alla richiesta; si trasforma trascinando B e C, mantenendo alcune proprietà invarianti ed evidenziando casi particolari. Si può anche far scoprire che si ottiene un quadrato quando un angolo è inscritto in una semicirconferenza.
  - Attività 2: partendo da due segmenti diversi, e operando in modo simile al caso precedente, si giunge a due tipi di risultati che possiamo indicare con caso del deltoide e caso del parallelogramma (dipende dalla simmetria applicata: assiale o centrale).

    Inoltre il trascinamento porta ad evidenziare anche quadrilateri non convessi nel caso del deltoide. Come nell'attività precedente, angoli inscritti in semicirconferenze porteranno ad individuare rettangoli e quadrati.
  - Attività 3: sono dati un quadrilatero qualunque ABCD e un segmento FG che rappresenta la base di un triangolo. Si vuole costruire su questo segmento un triangolo equivalente al quadrilatero. La costruzione avviene per passi successivi in cui si individuano figure tra loro equivalenti. Prima un triangolo (nello specifico ADE) con base uno dei lati del quadrilatero ed equivalente a quest'ultimo; quindi un triangolo di base uguale al segmento dato FG, equivalente al triangolo AED, che rappresenta una soluzione del problema proposto. Tuttavia se riportiamo il triangolo soluzione sul segmento EF scopriamo che le soluzioni sono infinite.
  - Attività 4: si chiede di disegnare un quadrilatero con due lati opposti paralleli, in modo che la perpendicolare ad uno di essi, tracciata per uno degli estremi, passi per il punto medio dell'altro. Il passaggio dal disegno su carta alla costruzione con il software mette in evidenza il fatto che la definizione data porta ad una serie di casi tra cui anche il caso del quadrilatero intrecciato e ne esclude altri (trapezio isoscele, rettangolo, quadrato).
- **Indicazioni metodologiche**: prerequisiti di queste attività sono:
  - La conoscenza di triangoli, parallelogrammi e trapezi.
  - Le trasformazioni geometriche (Attività 1, 2, 3).
  - La proprietà di triangoli inscritti in una semicirconferenza (Attività 2).
  - L'equivalenza di figure piane (Attività 3).

    Le attività possono essere svolte individualmente o a gruppi; comunque deve seguire una discussione in comune delle scoperte per giungere ad un risultato condiviso.

    In alcuni momenti sarà necessario affiancare l'uso del software con un lavoro di carta e penna, che non deve essere visto in contrapposizione, ma integrato nell'esplorazione dinamica con GeoGebra.

    Le attività 1 e 2 portano a differenti riflessioni sulle proprietà dei quadrilateri: diagonali, angoli, lati, convessità-concavità, simmetrie, …

    L'attività 3 può considerarsi un approccio alle trasformazioni di figure in altre figure equivalenti che consente poi di affrontare problemi più complessi.

È necessario scegliere il segmento FG minore del lato AD che serve per iniziare la costruzione (o del lato da cui la costruzione appunto inizia).

Per l'attività 4 è bene iniziare con un lavoro individuale con carta e matita e successiva condivisione dei risultati nella classe. Ad esempio si potrebbero classificare i quadrilateri disegnati, facendone anche una statistica. Solo successivamente dovrebbe essere richiesto l'uso del software. Il trascinamento deve portare allora a superare la staticità del disegno e scoprire quali quadrilateri effettivamente hanno le caratteristiche indicate.

- **Tempi**:
  - Attività 1: 40 minuti.
  - Attività 2: 1 ora.
  - Attività 3: 1 ora.
  - Attività 4: 40 minuti.


Schede per lo studenteAttività 1, 2, 3, 4.

Per ogni attività sono riportati esempi di videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1


Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi cartesiani e senza barra di inserimento.

Si vuole *costruire un quadrilatero con quattro lati congruenti.* Per far questo si sceglie di costruire inizialmente un triangolo isoscele con due lati congruenti ad un segmento dato e poi raddoppiarlo per ottenere un quadrilatero.

Per visualizzare il segmento, traccia sulla parte alta del monitor una semiretta che si evidenzia con il punto origine, A, ed un secondo punto B con il quale può ruotare per essere posta nella direzione voluta che potrebbe essere, per comodità, orizzontale rispetto al monitor.

Modifica le etichette di tali punti entrando col tasto destro nelle proprietà di ciascun punto. Chiamali M e N.

Prendi un punto sulla semiretta (diverso da M e N) e rinominalo P. Disegna il segmento MP.

Nascondi la semiretta e il punto N; controlla che P possa comunque variare a piacere.

Inserisci nel mezzo della pagina un punto, A.

Con l'opzione *Compasso* riporta, con centro in A, il segmento MN come raggio di una circonferenza. Su di essa prendi a caso un punto B.

Con l'opzione *Compasso* riporta, con centro in B, il segmento MN come raggio di una circonferenza. Su di essa prendi a caso un punto C.

Costruisci il triangolo ABC. Quali proprietà ha questo triangolo?

Con il comando *Simmetria assiale* evidenzia il simmetrico di ABC rispetto a AC.

Ottieni un quadrilatero ABCB', composto dai due triangoli ABC e AB'C: come sono questi due triangoli? Perché?

Completa la costruzione con il segmento BB' (in *Proprietà/Stile* scegliere un tratteggio).

Controlla che tutto il disegno possa essere alterato muovendo i punti B e C sulle rispettive circonferenze. Prova anche a spostare a piacere A; inoltre prova a vedere che cosa succede se muovi il punto P. Che tipo di quadrilatero hai ottenuto? Quali sono le sue proprietà?

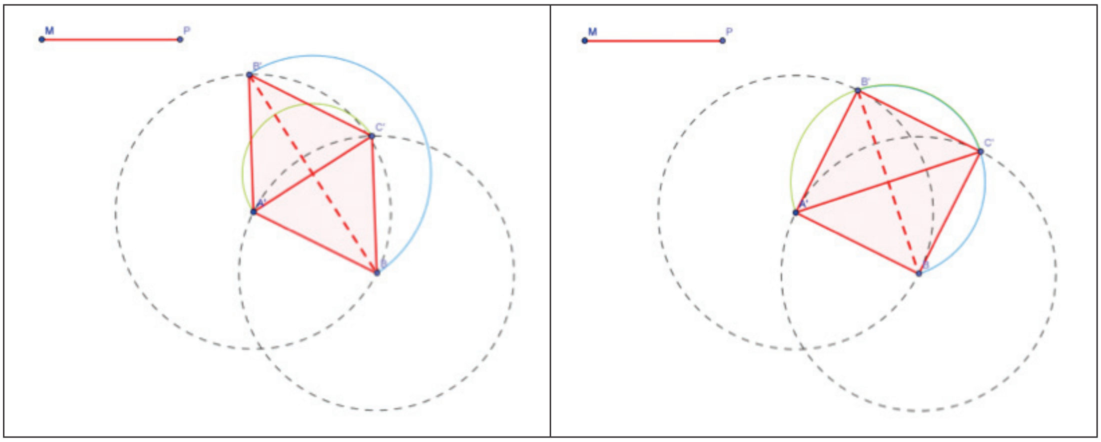
Costruisci ora una semicirconferenza per B e B'. Fai muovere il punto C: quando appartiene anche a quest'ultima circonferenza che quadrilatero ottieni? Perché?

In modo analogo costruisci una semicirconferenza per A e C. Fai muovere il punto B: quando appartiene anche a quest'ultima circonferenza che quadrilatero ottieni? Perché?

Che cosa accade alle due semicirconferenze nei casi particolari prima evidenziati?

Potevi ottenere il quadrilatero anche con qualche altra simmetria? Se sì, prova a verificarlo con GeoGebra.

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 1

Scheda per lo studente Attività 2

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi cartesiani e senza barra di inserimento.

Si vuole *costruire un quadrilatero con i lati a due a due congruenti.*

Per far questo si sceglie di costruire inizialmente un triangolo con due lati congruenti a due segmenti dati e poi raddoppiarlo attraverso una simmetria per ottenere il quadrilatero richiesto.

Per visualizzare i segmenti, traccia sulla parte alta del monitor una semiretta che si evidenzia con il punto origine, A, e un secondo punto B con il quale può ruotare per essere posta nella direzione voluta che potrebbe essere, per comodità, orizzontale rispetto al monitor.

Modifica le etichette di tali punti entrando col tasto destro nelle proprietà di ciascun punto. Chiamali M e N.

Prendi un punto sulla semiretta (diverso da M e N) e rinominalo P. Disegna il segmento MP.

Nascondi la semiretta e il punto N; controlla che P possa comunque variare a piacere nella direzione della semiretta.

Ripeti lo stesso procedimento su un'altra semiretta, rinominandola RS, giungendo quindi al segmento RT; controlla che T possa comunque variare a piacere nella direzione della semiretta.

Parte I

Inserisci nel mezzo della pagina un punto, A.

Con l'opzione *Compasso* riporta, con centro in A, il segmento MN come raggio di una circonferenza. Su di essa prendi a caso un punto B.

Con l'opzione *Compasso* riporta, con centro in B, il segmento RT come raggio di una circonferenza. Su di essa prendi a caso un punto C.

Costruisci il triangolo ABC. Trascina i vertici per verificare se questo triangolo ha qualche proprietà particolare che viene mantenuta al trascinamento.

Con il comando *Simmetria assiale* evidenzia il simmetrico di ABC rispetto a AC.

Ottieni un quadrilatero ABCB', composto dai due triangoli ABC e AB'C: come sono questi due triangoli tra loro? Perché? E cosa puoi dire dei triangoli ABB' e BB'C?

Completa la costruzione con il segmento BB' (in *Proprietà/Stile* scegliere un tratteggio). Trova l'intersezione tra BB' e AC (chiamala D).

Controlla che tutto il disegno possa essere alterato muovendo i punti B e C sulle rispettive circonferenze. Prova anche spostare a piacere A.

Inoltre prova a vedere che cosa succede se muovi i punti P e T. Come puoi descrivere il quadrilatero che hai ottenuto? Quali sono le sue proprietà? Il punto D risulta punto medio delle diagonali del quadrilatero? Di una, di tutte e due? Sempre?

Questo tipo di quadrilatero prende il nome di DELTOIDE. Prova a darne una definizione ed evidenzia le sue proprietà.

Costruisci ora una semicirconferenza per B e B'. Fai muovere il punto C: quando appartiene anche a quest'ultima circonferenza che quadrilatero ottieni? Perché?

In modo analogo costruisci una semicirconferenza per A e C. Fai muovere il punto B: quando appartiene anche a quest'ultima circonferenza che quadrilatero ottieni? Perché?

Muovendo i punti B e C accade talvolta che scompaia il punto D: che cosa accade in questo caso al quadrilatero? Come lo definiresti? Questa situazione si presenta quando il triangolo ABC è …

Usa ora la *Casella di controllo* per mostrare/nascondere oggetti. Inserisci Deltoide nella Legenda. Seleziona quindi tutti gli elementi che sono stati costruiti dopo il triangolo ABC. Controlla che disattivando la casella, la costruzione sparisca effettivamente tutta.

Salva per sicurezza il file che hai costruito.

Parte II

Dopo aver deselezionato Deltoide, individua il punto medio di AC (chiamalo F).

Opera su ABC con una simmetria di centro F.

Ottieni un quadrilatero ABCB', composto dai due triangoli ABC e AB'_1C: come sono questi due triangoli tra loro? Perché? E cosa puoi dire dei triangoli ABB'_1 e BB'_1C?

Completa la costruzione con il segmento BB'_1 (in *Proprietà/Stile* scegliere un tratteggio). Trova l'intersezione tra BB'_1 e AC: che cosa trovi?

Controlla che tutto il disegno possa essere alterato muovendo i punti B e C sulle rispettive circonferenze. Prova anche spostare a piacere A.

Inoltre prova a vedere che cosa succede se muovi i punti P e T. Come puoi descrivere il quadrilatero che hai ottenuto? Quali sono le sue proprietà? Visualizza il Deltoide ed osserva se le due simmetrie portano o meno allo stesso risultato.

I due quadrilateri ottenuti con le due differenti trasformazioni rispondono al fatto di avere i lati a due a due uguali. Tuttavia in che cosa differiscono?

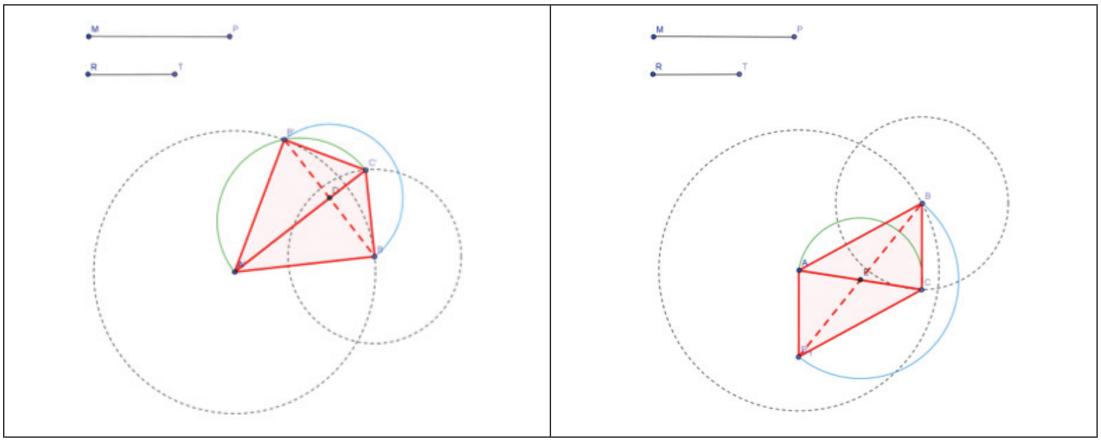
Costruisci ora una semicirconferenza per B e B'_1. Fai muovere il punto C: quando appartiene anche a quest'ultima semicirconferenza che quadrilatero ottieni? Perché?

In modo analogo costruisci una semicirconferenza per A e C. Fai muovere il punto B: quando appartiene anche a quest'ultima semicirconferenza che quadrilatero ottieni? Perché?

Quando B o C appartengono ad una semicirconferenza, come risultano fra loro le due semicirconferenze?

Usa ora la *Casella di controllo* per mostrare/nascondere oggetti. Inserisci Parallelogramma nella Legenda. Seleziona quindi tutti gli elementi che sono stati costruiti in questa Parte II. Controlla che disattivando la casella, la costruzione sparisca effettivamente tutta.

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 2

Scheda per lo studente Attività 3

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi cartesiani e senza barra di inserimento. Apri anche la Vista Algebra.

Vogliamo costruire, *dato un quadrilatero qualsiasi, un triangolo di base data ed equivalente al quadrilatero*. Faremo questo per passi successivi, individuando in sequenza triangoli fra loro equivalenti, per giungere alla fine alla soluzione del problema.

Costruisci un generico quadrilatero ABCD (*generico* significa che non abbia alcuna proprietà particolare). Costruisci il segmento FG, che rappresenta la base data del triangolo (diverso dai lati del quadrilatero).

Parte I

Nel quadrilatero traccia la diagonale AC e per B la retta parallela ad essa. Su quest'ultima prendi un punto P (verifica che si muova solo sulla retta).

Congiungi A e C con P. Fai muovere il punto P: come sono tra loro i triangoli ACP che si generano? Perché?

Traccia la semiretta DC; chiama E il punto di intersezione di questa con BP.

Costruisci ora il triangolo ADE. Modifica il colore (Tasto destro, *Proprietà*, *Colore*)

Osserva il disegno: il segmento AC divide in due triangoli

- il quadrilatero ABCD. Essi sono ACD e …
- il triangolo ADE. Essi sono ACE e …

Ma i due triangoli ABC e ACE sono … quindi ABDC e ADE sono …

Utilizza ora la Vista Algebra. Trovi scritto, sotto il titolo Quadrilatero, *poli1* e, sotto il titolo Triangolo, *poli2*. Le scritte *poli*… rappresentano l'area dei poligoni inseriti nella Vista Grafica. Che cosa osservi? Il risultato numerico corrisponde a quanto avevi scoperto attraverso le proprietà geometriche dei due poligoni?

Purtroppo ADE non è ancora il triangolo cercato perché la base non è uguale a FG.

Parte II

Nascondi il segmento AC, il punto P e i segmenti AP e CP (tasto destro, deseleziona *Mostra oggetto*).

Con *Compasso*, prendi il segmento FG e riportalo con centro in A. Trova ora il punto di intersezione tra circonferenza e AD (sarà H). Per far questo, dopo aver selezionato l'icona dell'intersezione, cerca nella Vista Algebra il lato AD del triangolo ADE (quando si appoggia sopra un valore il cursore del mouse, si evidenzia l'oggetto corrispondente): clicca sopra con il mouse (facendo attenzione a non premere sul pallino perché altrimenti il segmento viene nascosto). Clicca quindi sulla circonferenza (sotto il titolo Conica) e dovresti avere il punto di intersezione.

Nella Vista Algebra clicca ora sul pallino della circonferenza per nasconderla.

Nella Vista Grafica traccia la semiretta AE, quindi il segmento HE e la parallela ad esso per D. Determina quindi la sua intersezione (I) con la semiretta AE.

Prendi un punto (Q) sulla retta DI: controlla che Q si muova solo su essa.

Traccia i segmenti HQ e HE; fai muovere Q: come sono fra loro i triangoli HQE? Perché?

Come sono tra loro i triangoli HQE e HDE? E il triangolo HEI?

Disegna ora il triangolo AIH (cambiagli colore). Se lo confronti con ADE, vedi che:

- ADE è formato da AEH e …
- AIH è formato da AEH e …

Quindi i due triangoli sono …

Utilizza ora la Vista Algebra. Trovi scritto, sotto il titolo Triangolo, poli2 e poli3. Che cosa osservi? Il risultato numerico corrisponde a quanto avevi scoperto attraverso le proprietà geometriche dei due poligoni? Confronta il valore anche con quello di poli1.

Modifica la lunghezza del segmento FG e trascina i vertici del quadrilatero: i tre valori poli1, poli2, poli3 rimangono sempre uguali?

Questo significa che abbiamo trovato un triangolo equivalente al quadrilatero con base data. Ma la soluzione è unica?

Parte III

Vogliamo riportare il triangolo trovato sulla base FG.

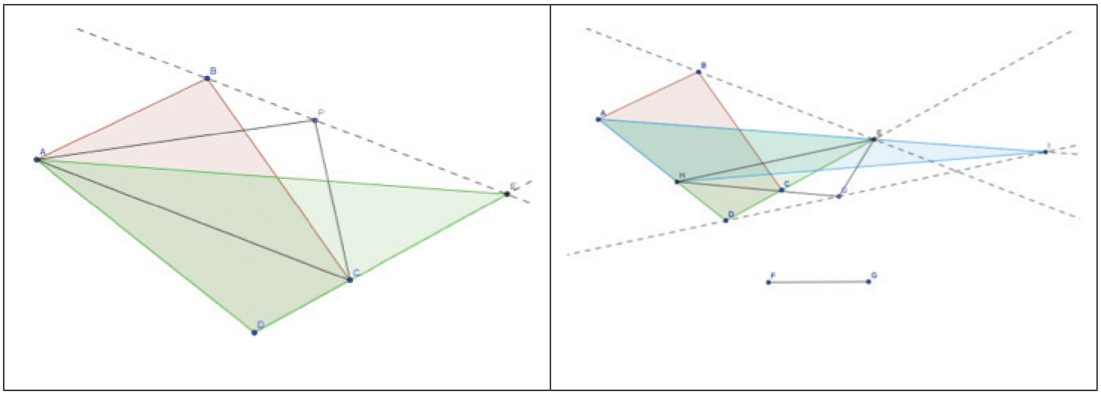
Traccia allora la retta AD e la sua perpendicolare per I; trova l'intersezione (J) fra le due rette. Traccia il segmento IJ: che cosa rappresenta per il triangolo AHI?

Traccia per F la perpendicolare a FG. Riporta con Compasso IJ nel centro F. Trova l'intersezione dei due oggetti (K).

Traccia per K la parallela a FG. Prendi un punto (L) su tale parallela e disegna il triangolo FGL. Muovi L. Come risultano i triangoli? Controlla anche nella Vista Algebra (poli4).

Possiamo quindi concludere come soluzione che …

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 3

Scheda per lo studente Attività 4

Che cos'è?

Disegnare un quadrilatero con due lati opposti paralleli, in modo che la perpendicolare ad uno di essi, tracciata per uno degli estremi, passi per il punto medio dell'altro.

Disegna sul tuo quaderno un quadrilatero che risponda a quanto richiesto.

Controlla il tuo disegno con quello dei tuoi compagni: avete disegnato tutti lo stesso quadrilatero? Come mai?

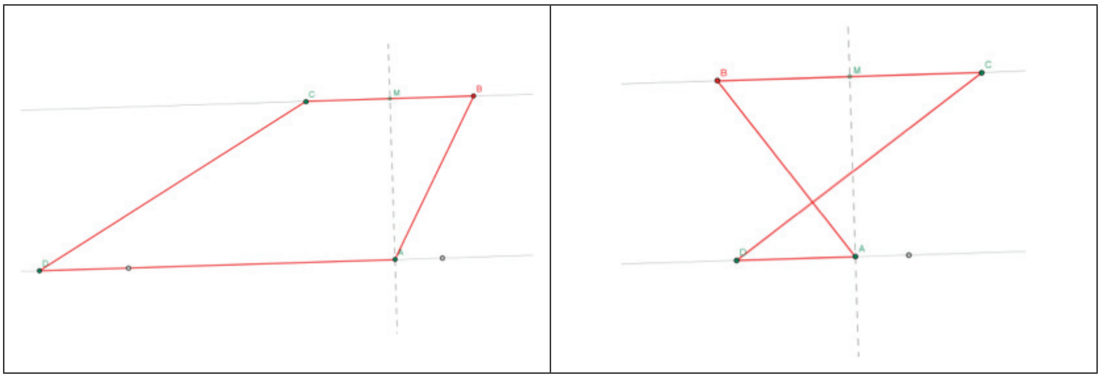
Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza assi cartesiani e senza barra di inserimento.

Ripeti con il software la costruzione fatta su carta. Trascina i vertici liberi e scopri tutti i tipi di quadrilatero che puoi formare. Puoi formare tutti i tipi di trapezi? Perché?

Puoi formare anche parallelogrammi? e rettangoli? e rombi? e quadrati? Perché?

Quali altri tipi di quadrilateri puoi formare? Ci sono quadrilateri che non ti aspettavi di trovare? Cosa hanno di particolare?

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 4

CAPITOLO 4

Dai numeri ai punti del piano cartesiano

Introduzione

In questo capitolo viene affrontato il delicato passaggio dalla geometria sintetica alla geometria analitica. Spesso, nell'immaginario dello studente che affronta il calcolo algebrico e lo studio delle proprietà di alcune figure geometriche, il mondo dell'algebra e quello della geometria restano separati, mentre la geometria analitica si presenta come un terzo mondo senza quasi alcuna relazione con gli altri due. GeoGebra aiuta a ricomporre le due visioni attraverso la contemporanea gestione dei tre registri, numerico, simbolico e grafico.

Si può iniziare semplicemente operando su due punti isolati, di cui uno può muoversi liberamente nel piano e l'altro ha le coordinate legate a quelle del primo: la rappresentazione nel piano cartesiano, con le relazioni che il trascinamento evidenzia, consente allo studente di scoprire un insieme di proprietà geometriche collegate ad aspetti algebrici.

Successivamente si analizza la situazione in cui un punto, pur governando gli altri, si muove su un vincolo (uno degli assi) facendo generare così un luogo al punto che da esso dipende; in questo caso lo studente sarà invitato ad esplorarne le equazioni, individuando il legame tra queste e le proprietà geometriche.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

- L'alunno spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
- Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.
- Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).
- Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali e alle Linee guida per il biennio della scuola secondaria

- Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.
- Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

Uno sguardo a GeoGebra

Comandi GeoGebra con inserimenti nella barra apposita:

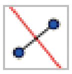
Punto	Punto P di ascissa *a* e ordinata *b*	P = (a,b) Si noti: • Il nome con la lettera maiuscola • L'uguale prima delle parentesi • La virgola come separatore L'ascissa e l'ordinata di P possono essere richiamate ed utilizzate per altri oggetti: • x(P) è l'ascissa; • y(P) è l'ordinata. Invece P = (a;b) con il punto e virgola come separatore rappresenta ancora un punto, ma espresso in coordinate polari (*a* modulo, *b* angolo)
Vettore	Vettore *u* con punto di applicazione O, componente orizzontale *a*, verticale *b*	u = (a,b) Nota: si distingue dal punto per la lettera minuscola del nome. Nella *Vista Algebra* compare la scritta $u = \binom{a}{b}$

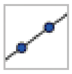
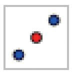
Proprietà degli oggetti GeoGebra

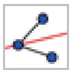
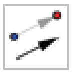
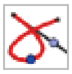
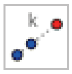
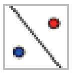
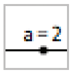
Traccia	Menu Visualizza/Proprietà/Fondamentali/*Mostra traccia selezionato* oppure Tasto destro mouse Proprietà/*Traccia attiva selezionato*	Se la traccia è attiva su un oggetto, quando questo viene trascinato lascia una traccia. Questa non è però un oggetto e quindi non viene salvata con il file: è una rappresentazione provvisoria che sparisce ad esempio se viene mossa la pagina grafica. Per cancellare: Ctrl+F

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Punto su un oggetto	
Asse	

Strumenti	*Icone*
Retta per due punti	
Simmetria centrale	

Bisettrice		Traslazione	
Luogo		Omotetia	
Simmetria assiale		Slider	

OSSERVAZIONE 1: richiedendo *bisettrice* in riferimento agli assi cartesiani, vengono disegnate entrambe le rette bisettrici di due quadranti adiacenti. Se necessario, nascondere quella che non serve.

OSSERVAZIONE 2: a differenza di quanto accade scrivendo sulla carta, le coordinate di un generico punto A in GeoGebra possono cambiare se si prende il punto e lo si trascina. Questo ha sostanziali ricadute su tutti gli altri oggetti solo se essi sono collegati ad A.

> Provare a inserire ad esempio in GeoGebra il punto A = (-2,4) e il punto B che ha ascissa opposta ma la stessa ordinata di A: B = (2,4). Trascinare il punto A: le proprietà stabilite attraverso la definizione di B non vengono mantenute.
>
> Perché il punto B mantenga le proprietà con cui è stato definito inizialmente è necessario scrivere le coordinate *in funzione di quelle di A*. Pertanto B dovrà essere espresso come B = (-x(A), y(A)).

Tenere conto di questa osservazione per le attività che seguono.

OSSERVAZIONE 3: sebbene nella versione 4.2 sia stato introdotto il comando *EquazioneLuogo*, ci sono ancora problemi per il suo funzionamento in tutte le situazioni. Pertanto nelle schede non è stato utilizzato. Poiché però nel paragrafo 2 ci si limita alla rappresentazione di rette, le equazioni delle stesse sono facilmente individuabili prendendo due punti sul grafico. In questo modo è possibile visualizzare l'equazione nella Vista Algebra.

OSSERVAZIONE 4: nel caso si debbano inserire moltiplicazioni, scrivendo ad esempio nella barra di inserimento, si può optare per due diverse modalità:

- Inserire i fattori senza segni di operazione, solamente separati da uno spazio.
- Inserire i fattori separati dal simbolo *.

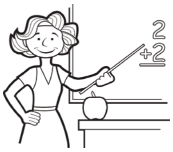
1. Assi cartesiani, punti e coordinate[1]

Vengono presentate quattro attività che hanno in comune la caratteristica di costruire, a partire da un punto A libero di muoversi nel piano, altri punti le cui coordinate sono legate con una relazione a quelle di A. La traccia di A e di ciascuno dei nuovi punti evidenzia proprietà che gli studenti sono invitati a scoprire e a giustificare algebricamente. In particolare in alcuni casi la relazione è modellizzata da una trasformazione geometrica che potrà essere usata come verifica dell'ipotesi fatta.

Pur essendo state pensate con una sequenza logica, le schede possono essere utilizzate in modo indipendente l'una dall'altra, anche in tempi diversi.

[1] Schede di A. Sargenti

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**: Mettere in relazione l'aspetto geometrico e quello algebrico:
  - o delle principali simmetrie (Attività 1);
  - o delle traslazioni (Attività 2);
  - o dell'omotetia e dei cambiamenti di scala (Attività 3);
  - o di particolari trasformazioni che risulteranno fondamentali nel successivo studio di funzioni: quadrato, radice, valore assoluto, reciproco (Attività 4).
- **Ordine di scuola**:
  - o Attività 1 e 2: scuola secondaria I grado, primo biennio scuola secondaria II grado.
  - o Attività 3 e 4: primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**: analizzare, al variare di un punto A indipendente, il comportamento di alcuni punti che hanno coordinate in relazione con quelle di A.
  - o Attività 1: La traccia ottenuta per A e per i punti B, C, D ed E porta ad identificare alcune simmetrie notevoli (rispetto all'asse y, rispetto all'asse x, rispetto all'origine, rispetto alla bisettrice principale degli assi), di cui i grafici ottenuti con la traccia mettono anche in evidenza le caratteristiche.
  - o Attività 2: La traccia ottenuta per A e per i punti F, G, e H porta ad identificare le traslazioni (nella direzione di x, di y, qualsiasi), scoprendone le caratteristiche. In questo caso è necessario introdurre il concetto di vettore.
  - o Attività 3: La traccia ottenuta per A e per i punti porta in due casi ad individuare, attraverso le caratteristiche dei grafici, le omotetie di centro O che generano i due punti a partire da A. Per contro le tracce degli altri due punti mettono in evidenza una trasformazione non prevista negli strumenti di GeoGebra, ovvero il cambiamento di scala.
  - o Attività 4: La traccia ottenuta per A e per i punti porta a definire, attraverso le caratteristiche dei grafici, le proprietà di tali trasformazioni, mettendo anche in relazione tra di loro alcune delle trasformazioni analizzate. In particolare potranno essere analizzate le ricadute degli operatori algebrici considerati sulle proprietà dei grafici.
- **Indicazioni metodologiche**: prerequisito di queste attività (almeno delle prime tre) è la conoscenza delle trasformazioni geometriche (simmetrie, traslazioni, omotetia) dal punto di vista della geometria sintetica.

  Le attività possono essere svolte in piccoli gruppi (2/3 studenti).

  Si inizia con un lavoro con carta e penna in cui gli studenti devono scrivere le coordinate dei punti, traducendo il linguaggio descrittivo in formule.

  Le schede contengono poche indicazioni sulle procedure da utilizzare per il software, per altro molto semplici; si richiede invece di descrivere cosa si osserva, inquadrandolo geometricamente e motivandolo algebricamente.

  Sarà cura del docente operare una sintesi sul lavoro, mettendo in evidenza le relazioni tra geometria ed algebra e come questi legami intervengano ad esempio nelle trasformazioni geometriche osservate.

- **Tempi**:
  - o Attività 1 e 2: 20 minuti ciascuna.
  - o Attività 3 e 4: 30 minuti ciascuna.


Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4.

Per ogni attività sono riportati esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

1. Esprimi un punto A qualsiasi attraverso le sue coordinate cartesiane.
2. Esprimi il punto B che ha la stessa ordinata di A ma ascissa opposta.
3. Esprimi il punto C che ha la stessa ascissa di A ma ordinata opposta.
4. Esprimi il punto D che ha le coordinate opposte rispetto a quelle di A.
5. Esprimi il punto E che ha ascissa ed ordinata scambiate rispetto a quelle di A.

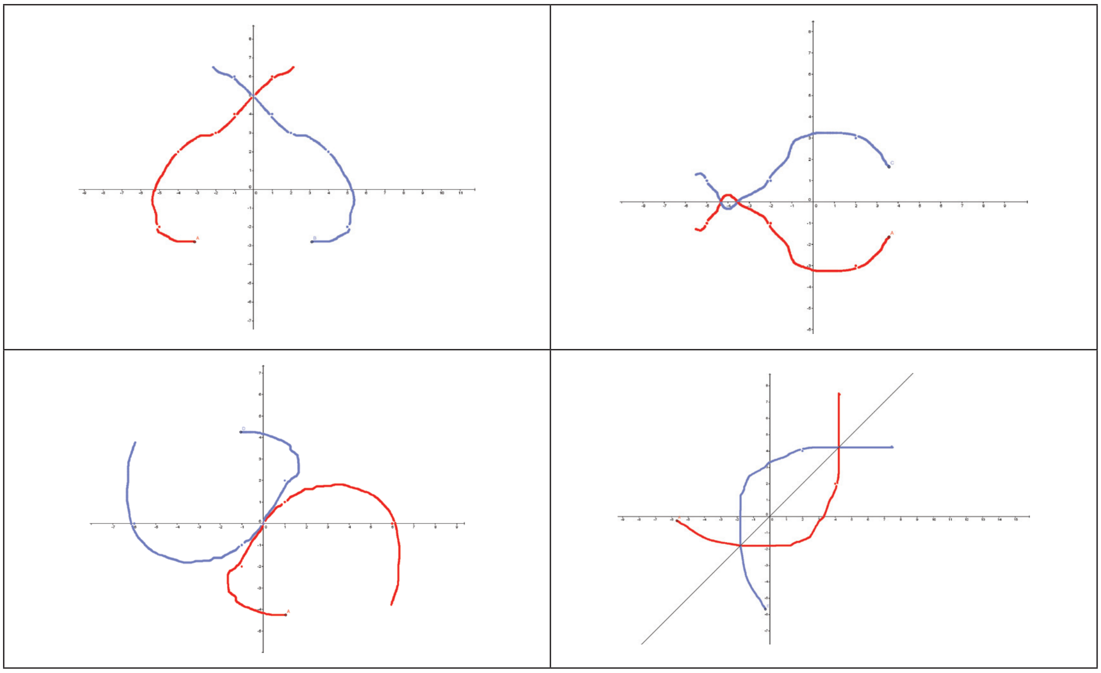
 

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

6. Inserisci il punto A in GeoGebra.
7. Inserisci quindi il punto B esprimendo le coordinate in funzione di quelle di A.
8. Seleziona il *colore* rosso per A e blu per B. Attiva la *traccia* sui due punti.
9. Muovi in modo ordinato il punto A con il mouse. Quale trasformazione consente di passare da A a B?
10. Opera la *trasformazione* del punto A (si ottiene A').
11. *Rinomina* in B' il punto A' così ottenuto. Seleziona per esso il *colore* verde.
12. Muovendo A controlla se B e B' risultano sempre sovrapposti.
13. A e B si sovrappongono in alcuni casi? Se sì, quando e perché.
14. *Nascondi* i punti B e B'.
15. Ripeti i procedimenti indicati da 7 a 14 anche per gli altri punti, C, D*, E*.

*NOTA: prima di operare con D è necessario introdurre il punto O=(0,0); prima di operare con E occorre disegnare la bisettrice del I e III quadrante. GeoGebra disegna contemporaneamente le bisettrici di tutti e quattro i quadranti: nascondi quella che non serve.

Al termine salva il file con il nome *simmetrie*.



Videate Attività 1

Scheda per lo studente Attività 2

1. Esprimi un punto A qualsiasi attraverso le sue coordinate cartesiane.
2. Esprimi il punto F che ha la stessa ordinata di A ma ascissa diminuita di 4 rispetto a quella di A.
3. Esprimi il punto G che ha la stessa ascissa di A ma ordinata aumentata di 2 rispetto a quella di A.
4. Esprimi il punto H che ha l'ascissa come quella di A aumentata di 3 e ordinata domininuita di 5 rispetto a quella di A.

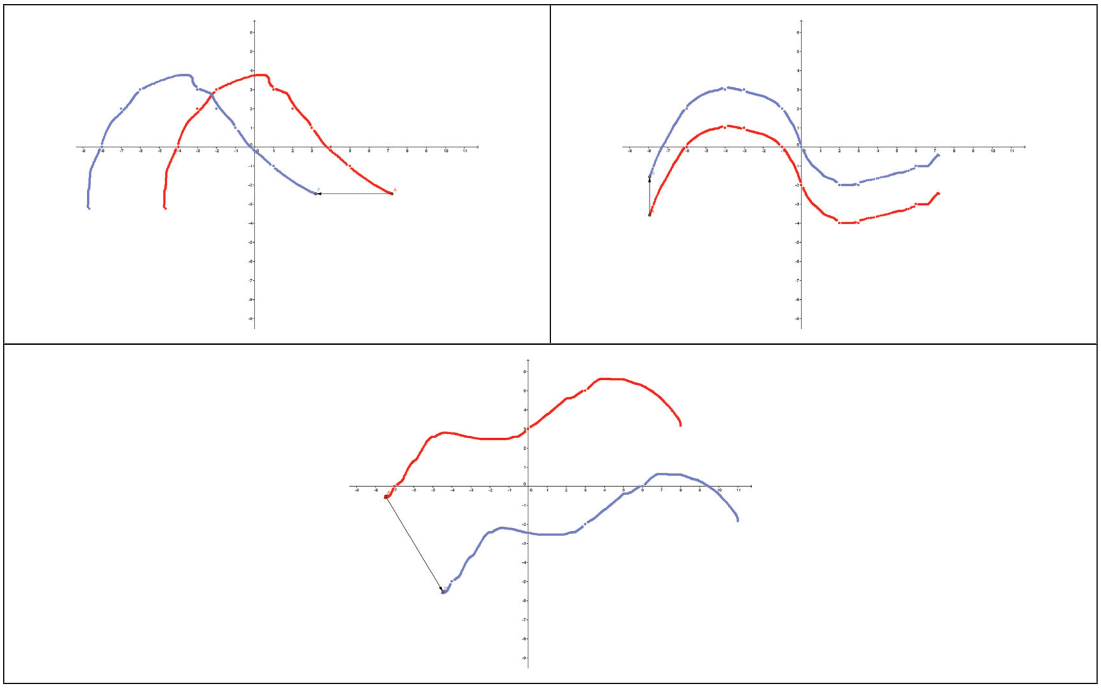
Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

5. Inserisci il *punto* A in GeoGebra.
6. Inserisci quindi il *punto* F esprimendo le sue coordinate in funzione di quelle di A.
7. Seleziona il *colore* rosso per A e blu per F. Attiva la *traccia* sui due punti.
8. Muovi in modo ordinato il punto A con il mouse. Quale trasformazione consente di passare da A a F (vedi NOTA *)?
9. Opera la *trasformazione* del punto A (si ottiene A').

10. *Rinomina* in F' il punto A' così ottenuto. Seleziona per esso il *colore* verde.
11. Muovendo A controlla se F e F' risultano sempre sovrapposti.
12. A e F si sovrappongono in alcuni casi? Se sì, quando e perché.
13. *Nascondi* i punti F e F'
14. Ripeti i procedimenti indicati da 6 a13 anche per gli altri punti G*, H*.

*NOTA: per operare le trasformazioni richieste è necessario prima aver definito per ciascuna trasformazione un vettore che indica nell'ordine lo spostamento orizzontale e quello verticale.

Al termine salva il file con il nome *traslazioni.*



Videate Attività 2

Scheda per lo studente Attività 3

1. Esprimi un punto A qualsiasi attraverso le sue coordinate cartesiane.
2. Esprimi un punto J le cui coordinate sono il triplo di quelle di A.
3. Esprimi un punto K che ha la stessa ascissa di A ma ordinata il triplo di quella di A.
4. Esprimi un punto M le cui coordinate sono la metà di quelle di A.
5. Esprimi un punto N che ha la stessa ascissa di A ma ordinata la metà di quella di A.

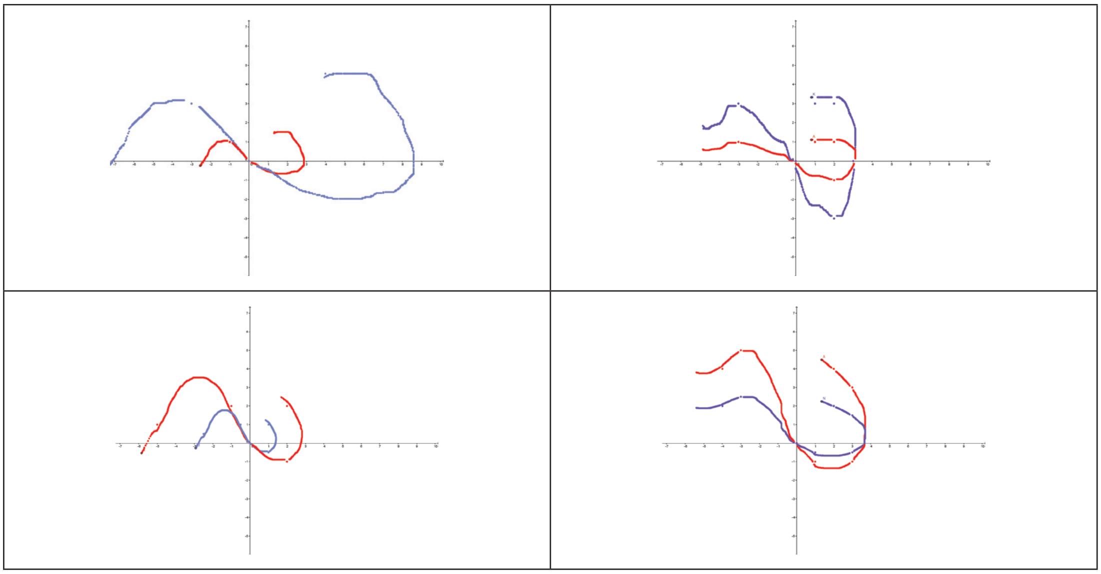
 

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

6. Inserisci il *punto* A in GeoGebra.
7. Inserisci quindi i *punti* J e K.
8. Seleziona il *colore* rosso per A, blu per J e viola per K. Attiva la *traccia* sui tre punti.
9. Muovi in modo ordinato il punto A con il mouse. Descrivi quindi analogie e differenze che osservi tra i grafici, motivandole algebricamente.
10. *Nascondi* K.
11. A e J si sovrappongono in alcuni casi? Se sì, quando e perché.
12. Quale trasformazione consente di passare da A a J (vedi NOTA *)?
13. Opera la *trasformazione* del punto A (si ottiene A').
14. *Rinomina* in J' il punto A' così ottenuto. Seleziona per esso il colore verde.
15. Muovi A e controlla se J e J' risultano sempre sovrapposti.
16. *Nascondi* i punti J e J'; *visualizza* K.
17. A e K si sovrappongono in alcuni casi? Se sì, quando e perché.
18. Osserva la traccia di A e K: come potresti descrivere il passaggio da una all'altra? Motiva la risposta algebricamente.
19. *Nascondi* il punto K.
20. Ripeti i procedimenti indicati da 7 a19 anche per gli altri punti M*, N.

*NOTA: per operare le trasformazioni richieste nella scheda è necessario prima aver definito il punto O=(0,0).

Al termine salva il file con il nome *cambioscala.*



Videate Attività 3

Scheda per lo studente Attività 4

Esprimi un punto A qualsiasi attraverso le sue coordinate cartesiane.

Esprimi il punto P che ha la stessa ascissa di A e ordinata il quadrato dell'ordinata di A.

Esprimi il punto Q che ha la stessa ascissa di A e ordinata la radice dell'ordinata di A.

Esprimi il punto R che ha la stessa ascissa di A e ordinata il valore assoluto dell'ordinata di A.

Esprimi il punto S che ha la stessa ascissa di A ma ordinata reciproca.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Inserisci il *punto* A in GeoGebra.

Inserisci quindi il *punto* P.

Seleziona il *colore* rosso per A, blu per P. Attiva la *traccia* sui due punti.

Muovi in modo ordinato il punto A con il mouse. Dove si posiziona la traccia di P? Motiva la risposta.

A e P si sovrappongono in alcuni casi? Se sì, quando e perché.

I segni delle ordinate di A e P sono sempre concordi?

È corretta l'affermazione "$y(P)>y(A)$"? Motiva la risposta.

Nascondi il punto P.

Inserisci ora il *punto* Q e *coloralo* di verde, attivandone la *traccia*.

Muovi in modo ordinato il punto A con il mouse. Il punto Q è sempre visibile per qualsiasi posizione di A? Motiva la risposta. Osserva le sue *coordinate* nella *Vista Algebra* mentre si muove A.

Dove si posiziona la *traccia* di Q? Motiva la risposta.

A e Q si sovrappongono in alcuni casi? Se sì, quando e perché.

Nascondi il punto Q.

Inserisci ora il *punto* R e *coloralo* di viola, attivandone la *traccia*.

Muovi in modo ordinato il punto A con il mouse. Il punto R è sempre visibile per qualsiasi posizione di A? Motiva la risposta. Osserva le sue *coordinate* nella *Vista Algebra* mentre si muove A.

Dove si posiziona la *traccia* di R? Motiva la risposta.

A e R si sovrappongono in alcuni casi? Se sì, quando e perché.

C'è qualche legame particolare tra la *traccia* di A e quella di R?

Nascondi il punto R.

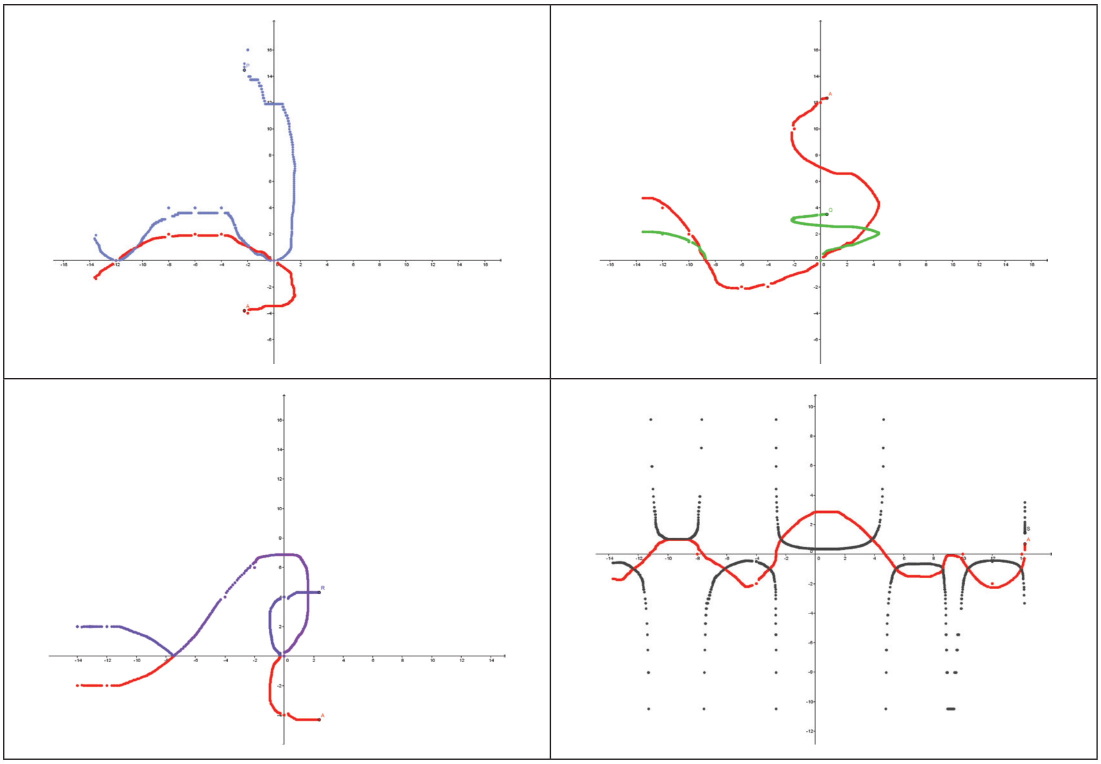
Inserisci il *punto* S, attivandone la *traccia*.

Muovi in modo ordinato il punto A con il mouse. Il punto S è sempre visibile per qualsiasi posizione di A? Motiva la risposta. Osserva le sue *coordinate* nella *Vista Algebra* mentre si muove A.

A e S si sovrappongono in alcuni casi? Se sì, quando e perché.

È corretta l'affermazione "$y(S)<y(A)$"? Motiva la risposta.

Al termine salva il file con il nome *trasformazioni*.



Videate Attività 4

2. Punti, luoghi ed equazioni[2]

In questo paragrafo il punto A viene vincolato a muoversi sull'asse delle ascisse. Anche in questo caso si chiede di definire alcuni punti le cui coordinate sono dipendenti da quelle di un punto noto A ed eventualmente di uno *slider*. Questo consente di passare da un'analisi con la traccia, come è avvenuto per le attività precedenti, alla rappresentazione del luogo geometrico del nuovo punto, al variare di A. In più viene introdotto l'uso dello *slider* per analizzare una classe di situazioni.

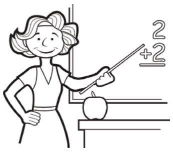
La scelta operata sulle relazioni proposte porta a definire le rette come luoghi. Le schede possono considerarsi dunque un'introduzione alle funzioni lineari.

Gli studenti sono invitati a scoprire e a giustificare le relazioni tra le proprietà geometriche del luogo e le caratteristiche della sua equazione.

La sequenza delle schede segue un filo logico preciso ma è anche possibile utilizzarle in tempi differenti ed in modo autonomo l'una dall'altra. Si consiglia comunque di svolgere almeno una delle attività del paragrafo 1 prima di affrontare quelle di questo paragrafo.

[2] Schede di A. Sargenti

Scheda per il docente



- **Nucleo**: geometria.
- **Obiettivi**: Mettere in relazione l'aspetto geometrico e quello algebrico:
  - o per le rette (Attività 1);
  - o per alcune rette particolari (Attività 2 e 3).
- **Ordine di scuola**:
  - o Attività 1 e 2: scuola secondaria I grado, primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**: analizzare, al variare di un punto A dell'asse *x*, il comportamento di alcuni punti che hanno coordinate in relazione con quelle di A e con quelle di uno *slider a*.
  - o Attività 1: un punto A varia sull'asse delle ascisse; i punti B ed E hanno la stessa ascissa di A e ordinate legate alle ordinate di A da una relazione di proporzionalità diretta (B) e lineare (E). B ed E quindi, al variare di A, generano ciascuno un luogo (retta). Due punti del luogo stesso individuano la retta di cui si può leggere l'equazione. Lo *slider* che caratterizza le relazioni consente anche di rendere dinamica la rappresentazione.
  - o Attività 2: sempre a partire da A vengono rappresentati i punti che generano le bisettrici dei quadranti.
  - o Attività 3: ancora a partire da A e da uno *slider a* vengono generati il fascio improprio delle rette parallele all'asse delle ascisse e quello all'asse delle ordinate.
- **Indicazioni metodologiche**: prerequisito di queste attività è lo svolgimento di almeno una delle attività del paragrafo 1 di questo capitolo.

  Le attività possono essere svolte in piccoli gruppi (2/3 studenti). Si alternano momenti di utilizzo del software a lavoro con carta e penna. Il procedimento è in parte opposto a quello del paragrafo precedente. Qui i punti vengono dati già nella formalizzazione da riportare nel software. Successivamente verrà chiesto di trasformare le formule in linguaggio naturale, esprimendo la definizione di luogo geometrico, le cui proprietà dovranno leggersi in contemporanea anche dalle equazioni del luogo.

  Come nel precedente paragrafo si richiede di descrivere cosa si osserva, inquadrandolo geometricamente e motivandolo algebricamente. Sarà cura del docente operare una sintesi sul lavoro, mettendo in evidenza le relazioni tra geometria ed algebra e come questi legami intervengano nelle rette.

  Nella scheda di Attività 3 le rette parallele agli assi vengono generate a partire da un punto N facendo variare o un punto A o uno *slider*, entrambi utilizzati nella definizione di N.

  Le schede contengono alcune indicazioni sulle procedure da utilizzare per il software, specialmente per quanto concerne la determinazione delle equazioni dei luoghi, non ancora automatizzata nella versione 4.2 di GeoGebra.

- **Tempi**:
  - o Attività 1: 40 minuti.
  - o Attività 2: 30 minuti.
  - o Attività 3: 30 minuti.

Schede per lo studenteAttività 1, 2, 3.

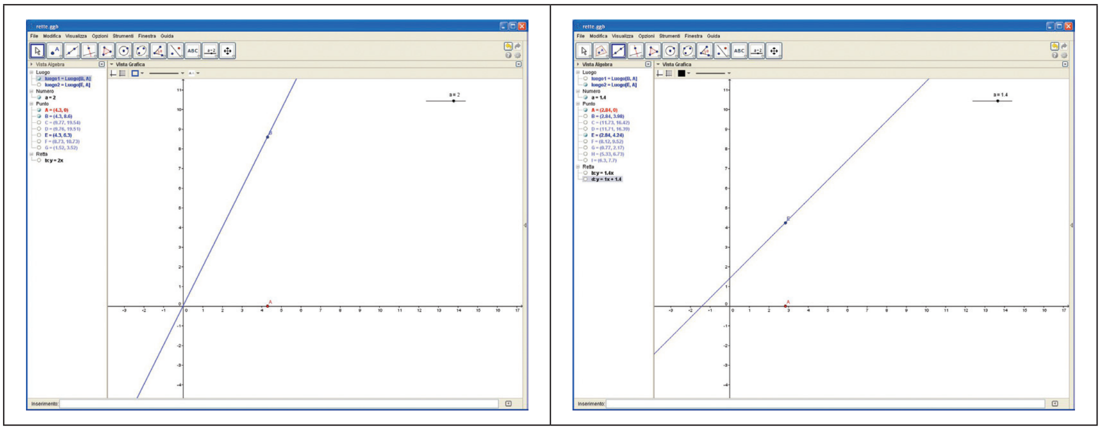
Per ogni attività sono riportati esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

1. Inserisci il *punto* A vincolato all'asse delle ascisse.
2. Inserisci uno *slider a*. Inizialmente il valore impostato sia 1.
3. Inserisci quindi il *punto* B=(x(A), a*x(A)).
4. Come potrebbero essere descritte le coordinate di B in funzione di A e dello s*lider*?
5. Seleziona il *colore* rosso per A e blu per B.
6. Usa lo strumento *Luogo* per ottenere il luogo di B al variare di A.
7. Hai ottenuto una retta? Attribuisci a questa lo stesso *colore* di B.
8. Puoi verificare che è effettivamente il luogo cercato operando con Muovi A: come si muove in corrispondenza B?
9. Se vuoi visualizzare l'equazione, ricorda che due punti definiscono una ed una sola retta. Prendi allora due punti (C e D) sul luogo e per essi traccia una retta (che si sovrapporrà al luogo stesso).
10. *Nascondi* i due punti C e D.
11. La retta del luogo è l'insieme di tutti i punti che hanno l'ordinata …
12. Nella *Vista Algebra* è ora comparso sotto la scritta *Retta*, un'equazione di 1° grado in *x* e *y*. Clicca sopra con il tasto destro del mouse e Seleziona *Equazione y=mx+q*.
13. C'è una qualche relazione tra quest'ultima equazione e la definizione di luogo data al punto 11?
14. Clicca sul pallino davanti all'equazione della retta (per renderlo "vuoto"): verrà nascosta, lasciando visibile solo il luogo.
15. Muovendo *a* che cosa accade al luogo? Cosa accade quando *a* è negativo? E quando è positivo? E quando è nullo?
16. *Nascondi* il punto B e il luogo.
17. Inserisci quindi il *punto* E=(x(A), x(A)+a).
18. Ripeti i procedimenti indicati da 4 a 15 anche per il punto E.

Al termine salva il file con il nome *rette*.



Videate Attività 1

Scheda per lo studente Attività 2

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

PRIMA PARTE

Inserisci il *punto* A vincolato all'asse delle ascisse.

Inserisci quindi il *punto* H=(x(A), x(A))

Seleziona il *colore* rosso per A e blu per H.

Usa lo strumento *Luogo* per ottenere il luogo di H al variare di A.

Hai ottenuto una retta? Attribuisci a questa lo stesso *colore* di H.

Puoi verificare che è effettivamente il luogo cercato operando con Muovi A: come si muove in corrispondenza H?

Se vuoi visualizzare l'equazione, ricorda che due punti definiscono una ed una sola retta. Prendi allora due punti (I e J) sul luogo e per essi traccia una retta (che si sovrapporrà al luogo stesso).

Nascondi i due punti I e J.

La retta del luogo è l'insieme di tutti i punti che hanno …

Nella *Vista Algebra* è ora comparso sotto la scritta *Retta*, una equazione di 1° grado in x e y. Clicca sopra con il tasto destro del mouse e Seleziona *Equazione* $y=mx+q$.

Confronta l'equazione con la definizione di luogo data precedentemente: puoi affermare che l'equazione rappresenta in modo sintetico quanto espresso nella definizione?

Come puoi definire geometricamente questa retta in riferimento agli assi cartesiani?

Nascondi il punto H e il luogo.

SECONDA PARTE

Inserisci il *punto* K=(x(A), -x(A))

Ripeti i procedimenti indicati per il punto H anche per il punto K.

Al termine salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 3


Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Inserisci il *punto* A vincolato all'asse delle ascisse.

Inserisci uno *slider a*. Inizialmente il valore impostato sia 1, con estremi -20 e 20.

Inserisci il *punto* N=(x(A),a).

Usa lo strumento *Luogo* per ottenere il luogo di N al variare di a. Coloralo di arancione.

Se fai variare a che cosa accade al luogo?

Puoi allora dire che il luogo trovato è l'insieme di tutti i punti che hanno …

Se vuoi visualizzare l'equazione, ricorda che due punti definiscono una ed una sola retta. Prendi allora due punti (P e Q) sul luogo e per essi traccia una retta (che si sovrapporrà al luogo stesso).

Nascondi i due punti P e Q.

Come puoi definire geometricamente questa retta in riferimento agli assi cartesiani?

Fai ora variare il punto A: che cosa ottieni?

Puoi concludere che al variare di A ottieni tutte …

Osserva ora l'equazione: che cosa accade al variare di A? e al variare di a? Spiega il motivo delle differenze.

Nascondi il luogo arancione.

Usa lo strumento *Luogo* per ottenere il luogo di N al variare di A. Coloralo di blu.

Visualizza l'equazione prendendo due punti sul luogo e tracciando la retta per essa. Nascondi i due punti che ti sono serviti per questa costruzione.

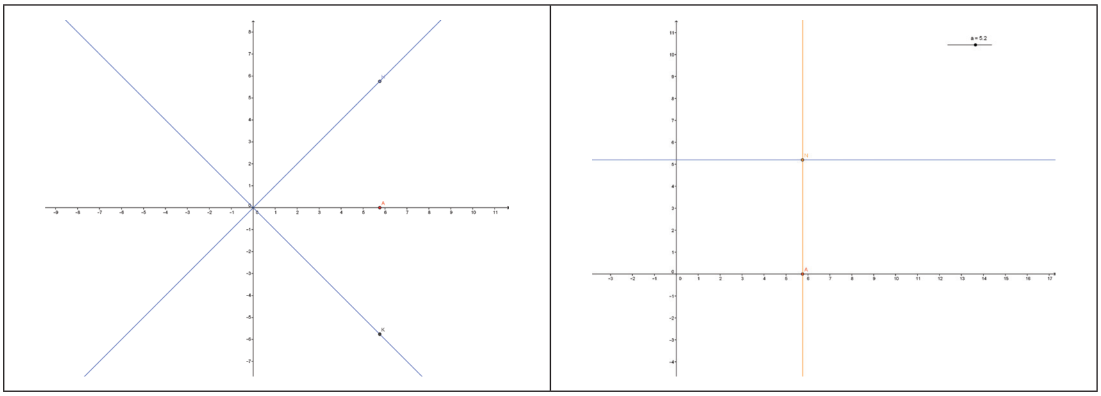
Come puoi definire geometricamente questa retta in riferimento agli assi cartesiani?

Fai ora muovere lo slider a: che cosa ottieni?

Puoi concludere che al variare di a ottieni tutte …

Osserva ora l'equazione: che cosa accade al variare di A? e al variare di a? Spiega il motivo delle differenze.

Al termine salva il file che hai costruito.



Videate Attività 2 e Attività 3

CAPITOLO 5

Proporzionalità diretta ed inversa

Introduzione

Il concetto di proporzionalità diretta, strumento importante per la modellizzazione di situazioni reali, viene affrontato molto precocemente nella scuola e si arricchisce di significati numerici ed algebrici al crescere delle conoscenze degli studenti. Questa evoluzione cela spesso, tuttavia, dei misconcetti. Uno di questi nasce dal fatto che al momento della sua introduzione non sono ancora noti i numeri relativi e quindi la definizione di proporzionalità che spesso viene data è legata ai razionali positivi, se non addirittura ai naturali, e allo specifico numerico delle proporzioni, piuttosto che all'idea di dipendenza funzionale. Questo porta come conseguenza che gli studenti siano indotti a pensare che due grandezze direttamente proporzionali crescano entrambe o diminuiscano entrambe, magari senza neppure mantenere una regolarità di crescita/decrescita. Pensare invece alla proporzionalità diretta come rapporto costante tra le due grandezze, essendo il dominio della costante ***Q*** (o ***R***), generalizza la definizione a tutti gli insiemi numerici.

Importante è poi legare la relazione alla sua interpretazione grafica in modo da associare fin dall'inizio la proporzionalità diretta al grafico di una retta per l'origine degli assi cartesiani.

L'introduzione del concetto di proporzionalità inversa è un po' più delicato perché meno intuitivo di quello della proporzionalità diretta. Anche in questo caso possono nascere misconcetti legati a definizioni non generali, in particolare legati alle proporzioni; è inoltre meno immediato riconoscere il prodotto costante tra le grandezze rispetto al rapporto del caso precedente. Anche in questo caso la rappresentazione grafica può dare senso alla definizione.

Infine la rappresentazione grafica può indurre misconcetti se non supportata da definizioni coerenti. Una volta introdotta la proporzionalità diretta e associata la stessa al grafico di una retta, gli studenti tendono ad associare a qualsiasi retta, anche a quelle non passanti per l'origine, lo stesso legame di proporzionalità tra le ordinate. Pertanto è parso opportuno concludere il capitolo con la dipendenza lineare che verrà ripresa ed approfondita nel successivo capitolo 6.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

- Analizzare e interpretare rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.
- Spiegare il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
- Confrontare procedimenti diversi e produrre formalizzazioni che consentono all'allievo di passare da un problema specifico a una classe di problemi.
- Produrre argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).
- Utilizzare e interpretare il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e coglierne il rapporto col linguaggio naturale.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali e alle Linee guida per il biennio della scuola secondaria

- Lo studente apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa. Il contemporaneo studio della fisica offrirà esempi di funzioni che saranno oggetto di una specifica trattazione matematica, e i risultati di questa trattazione serviranno ad approfondire la comprensione dei fenomeni fisici e delle relative teorie.
- Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati. (*Indicazioni per i Licei*)
- Lo studente sa analizzare dati ed interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico. (*Linee guida per gli Istituti Tecnici*)

Uno sguardo a GeoGebra

Operazioni nella Vista Algebra

Oggetti ausiliari	Attivare il Menu della Vista con ▸  Selezionare l'icona degli Oggetti ausiliari	Sono tali ad esempio gli oggetti definiti nel Foglio di calcolo.
Nascondere/ Visualizzare oggetti	Cliccare sul pallino davanti all'oggetto per modificarne lo stato.	**A1 = 3** A1 è nascosto, A2 viene visualizzato (in **A2 = 4** questo caso con uno *slider*)

Operazioni sul Foglio di calcolo

Copia relativo	Trascinare con il mouse il quadratino in basso a destra di una cella fino all'ultima cella da riempire.	Se scriviamo un numero in A1 e in A2 la formula A1+1, possiamo copiare A2 fino ad esempio a A10. Andando adesso con il mouse (senza premere tasti) sopra una cella, ad esempio A5, appare una finestra gialla (*tooltip*) in cui è scritto: *Numero A5: A4+1*. Questo sta ad indicare che il trascinamento ha copiato la formula in modo relativo, come a dire "aggiungi al valore della cella precedente 1" qualsiasi sia la cella presa in considerazione.
Casella associata ad uno slider	Vista Algebra attiva Selezionare *Oggetti ausiliari* (tutti quelli definiti nelle celle del Foglio di calcolo) Rendere visibile la cella/variabile desiderata	Se ad esempio clicchiamo sul pallino vuoto in corrispondenza di A1, esso si evidenzia e nella Vista Grafica si apre un nuovo *slider* A1.

Crea lista	Selezionare le celle interessate Tasto destro mouse *Crea lista* *Crea lista punti*	*Crea lista* riempie una sola colonna di valori (ad esempio i valori di uno *slider*). *Crea lista punti* riempie due colonne affiancate con le coordinate di un punto.

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

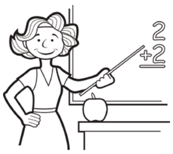
Strumenti	*Icone*
Intersezione di due oggetti	
Retta perpendicolare	
Retta parallela	
Poligono	

Strumenti	*Icone*
Slider	
Muovi la vista grafica	
Mostra/nascondi etichetta	
Copia stile visuale	

1. Proporzionalità diretta[1]

Questo paragrafo, oltre a puntualizzare il concetto di proporzionalità diretta, vuole essere una introduzione alla funzione lineare che viene trattata nel capitolo successivo. L'obiettivo è quello di associare i vari registri rappresentativi alla base del concetto: i numeri che rappresentano le grandezze ed il loro legame, la formula che rappresenta tale legame, il grafico che è un modello di quest'ultimo.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: numeri e relazioni.
- **Obiettivi**:
  - o Evidenziare la comune relazione (proporzionalità diretta) tra dati che intervengono nell'analisi di alcune situazioni, strutturarla fino ad usare il linguaggio matematico, sia in termini di formule che di grafico.
  - o Riconoscere situazioni in cui le grandezze sono legate da proporzionalità diretta.

[1] Schede di A. Sargenti, liberamente tratte dalle lezioni di M. Cantoni

- **Ordine di scuola**:
  - scuola secondaria I grado e primo biennio II grado.
- **Descrizione attività**:
  - Si parte dall'analisi di alcuni gruppi di dati (Attività 1): il confronto tra i diversi gruppi porta a scoprire la relazione di proporzionalità che li lega, fino a giungere alla formula che la interpreta.
    Per rafforzare il concetto, si opera quindi con un processo inverso: l'allievo sarà stimolato a cercare esempi di proporzionalità diretta tra le formule a lui già note dalla matematica, da altre scienze o dalla vita quotidiana.
  - Da quest'ultima si parte per il lavoro di analisi con GeoGebra (Attività 2). L'analisi del costo, variando il numero degli oggetti, porta alla rappresentazione di punti allineati sul piano cartesiano; allineamento che, oltre all'intuizione visiva, viene confermato dall'inserimento della formula che lega le grandezze e quindi dalla rappresentazione della retta su cui giacciono i punti.
  - Importante è analizzare i dati sia nella tabella sia nell'insieme di punti sul piano cartesiano: due possibilità espressive della relazione di tipo molto diverso ma strettamente collegate fra loro. Per questo è necessaria una generalizzazione che si svincoli dal problema particolare (Attività 3).
- **Indicazioni metodologiche**:
  - Prerequisito di queste attività è un minimo di capacità di uso del simbolismo algebrico per la traduzione delle relazioni, una conoscenza di base del software per la rappresentazione di grafici e per la gestione di dati nel foglio di calcolo.
  - Le attività possono essere svolte in coppia o individualmente, ma è sicuramente importante il confronto diretto coi compagni che dovrebbe far parte di un processo che si evolve in una discussione: dall'analisi di una realtà concreta al linguaggio matematico che generalizza le relazioni e le rende adatte ad esprimere una molteplicità di problemi.
  - È bene far osservare che, nella proporzionalità diretta, non sempre ad una successione crescente per una grandezza corrisponde una successione crescente nella grandezza ad essa collegata. Il mantenimento della stessa monotonia è infatti legato al segno della costante di proporzionalità. Il misconcetto spesso presente negli studenti deriva dall'introduzione nella scuola dell'obbligo della proporzionalità riferita a numeri positivi e alla proporzione tra questi senza che poi venga esteso il concetto a grandezze con rapporto costante negativo.
  - Nell'attività 2 può essere opportuno lavorare inizialmente con numeri interi per il costo unitario, per passare poi per raffinamenti successivi, a passi decimali dello *slider*: così si ottiene *quasi* un passaggio dal discreto al continuo.
  - GeoGebra offre un ulteriore approfondimento perché il foglio elettronico automaticamente immette, con uno *slider*, un ampliamento dei punti in tutto il piano cartesiano uscendo dal primo quadrante e permettendo quindi di considerare i dati numerici come *oggetti* astratti. Questo porta a scrivere algebricamente la relazione tra gli insiemi di numeri in gioco, cosa che caratterizza *tutta* la retta emersa e ne determina la sua *equazione*.
- **Tempi**:
  - Attività 1: ½ ora.
  - Attività 2: 1 ora.
  - Attività 3: ½ ora.

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3 .

Per l'Attività 2 sono riportati esempi di videate.

Scheda per lo studente Attività 1

In questa tabella sono riportate, per ciascuna riga, successioni ordinate di numeri.

A	1	2	3	4	5
B	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
C	4	8	12	16	20
D	-3	-6	-9	-12	-15
E	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	6	$\frac{15}{2}$

Sai indicare con quale relazione puoi passare dalla riga A alla riga B? Indica poi tutte le relazioni che permettono di passare dalla riga A a ciascuna delle altre.

Esiste qualche relazione per passare dalla C alla D? e dalla B alla E? e dalla C alla E?

La riga A è una successione crescente di numeri; si può fare la stessa affermazione per tutte le altre righe? Perché?

Completa:

Per passare da A a C applico la relazione (puoi indicare con a il generico termine di A, con c quello di C) $c =$ ….

Per passare da C a E applico la relazione (puoi indicare con c il generico termine di C, con e quello di E) $e =$ ….

Quindi se applico in successione le due relazioni (nella relazione che esprime e sostituisci la relazione che esprime c) …..

Controlla ora nella tabella se la formula trovata consente di passare da A a E.

Esprimi a parole come si passa da una riga qualsiasi della tabella ad un'altra riga della stessa.

Esprimi ora il fatto con una formula matematica (puoi indicare con x il generico termine di una riga, con y quello di un'altra, con k una generica costante).

La relazione che hai trovato e che è un modello per molti fenomeni, matematici e reali, prende il nome di **proporzionalità diretta**.

Pensa a formule a te note, della geometria, della fisica, dell'economia, … : sai individuarne qualcuna che è interpretata dalla proporzionalità diretta?

Scheda per lo studente Attività 2

Analizzerai qui il costo totale di un certo numero di oggetti al variare del costo unitario.

Apri un nuovo file con il Foglio di calcolo e la Vista Grafica con gli assi.

Usa uno *slider* che chiamerai p per esprimere il costo variabile di un oggetto: per questo il valore iniziale dovrà essere ….

Inizialmente supponi che tutti i prezzi abbiano valori interi, quindi seleziona questa opzione nello *slider*.

Devi ora inserire nel Foglio di calcolo la successione di naturali che esprimono il numero dei dati da prendere in considerazione, ovvero le possibili quantità di oggetti da acquistare. Per questo poni nella prima casella, A1, il numero 1, che è appunto l'elemento iniziale di tale successione.

Nella successiva casella della stessa colonna (A2) scrivi A1+1 e premi Invio. Sebbene compaia il numero 2, tieni presente che in questa casella è memorizzata una formula, non un numero. Te ne puoi rendere conto se ora nella casella A1 scrivi ad esempio 4: cosa succede in A2?

Riporta ora la situazione a quella di partenza A1=1 (questo può essere fatto scrivendo il numero direttamente nella cella o scrivendo l'uguaglianza nella barra di inserimento).

Volendo ora creare la successione 1, 2, 3, …, 20, posizionati sulla cella A2: nell'angolo inferiore destro appare un quadratino. Andando sopra con il mouse, premendo il tasto sinistro e trascinando fino a A20, otterrai quanto volevi.

Inserisci in B1 il costo relativo al numero di oggetti, ovvero il costo unitario per il numero di oggetti che porta alla formula *p*A1*. Che valore appare? Modifica il valore di p: che cosa appare in B1?

Ripeti per B1 il trascinamento, come fatto precedentemente nella colonna A, fino a B20.

Avrai in questo modo ottenuto una tabella di valori nelle caselle delle colonne A (numero variabile di oggetti) e B (costo corrispondente).

Rappresenta ora questi valori come punti del piano cartesiano: il valore della colonna A come ascissa e quello corrispondente della colonna B come ordinata. Per far questo evidenzia le due colonne contemporaneamente e col tasto destro crea una *Lista di punti* che immediatamente apparirà nella Vista grafica.

Come descriveresti la posizione di questi punti?

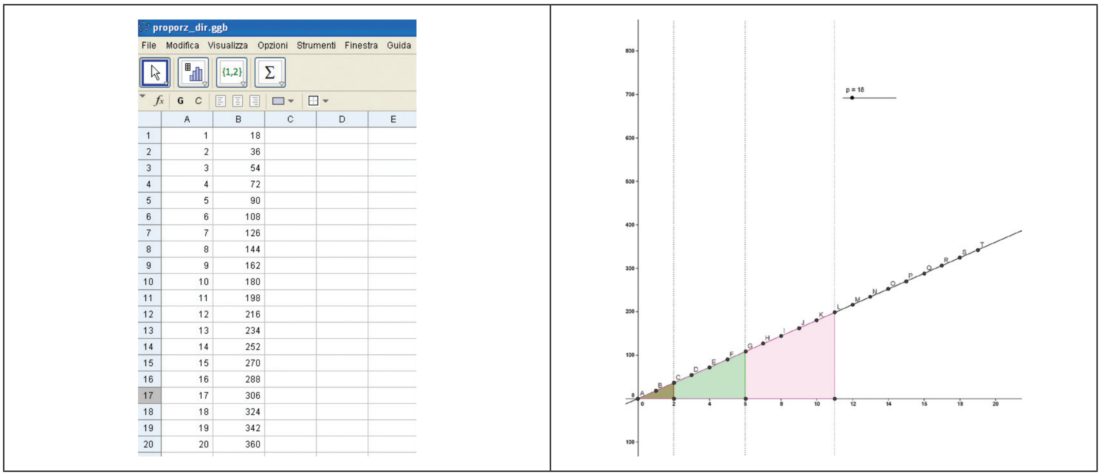
Disegna alcuni triangoli rettangoli che hanno come estremi dell'ipotenusa l'origine degli assi e un punto derivante dalla lista (il terzo vertice del triangolo si trova su … e quindi si ottiene come intersezione di questa retta e della perpendicolare all'asse delle ascisse passante per …). Come sono tra loro questi triangoli? Quale relazione quindi c'è tra i cateti?

Che cosa succede muovendo lo *slider p*? Come si dispongono i punti? Che cosa varia e che cosa rimane invariato nei triangoli?

Riporta nella Barra di inserimento la relazione precedentemente inserita nella colonna B, questa volta però utilizzando le variabili x (numero di oggetti), y (costo totale) e naturalmente il parametro p. Che cosa osservi nella Vista Grafica?

Analizza ora che cosa accade se i prezzi non sono interi. Modifica le *Proprietà* dello *slider* (tasto destro del mouse) introducendo ad esempio passo 0.1.

Al termine salva il file con il nome *prezzi.ggb*.



Videate Attività 2

Scheda per lo studente Attività 3

Con questa attività potrai generalizzare quanto visto prima, svincolandoti dal problema particolare dei prezzi, che possono assumere solo valori positivi.

Apri il file *prezzi.ggb*.

Verifica che sia attiva la Vista Grafica, il Foglio di Calcolo, la Vista Algebra; seleziona in quest'ultima *Oggetti ausiliari*.

Rendi visibile A1: nella Vista Grafica appare uno *slider* con questo nome. Prova a farlo variare: che cosa osservi nella Vista Grafica? Come si dispongono i punti?

Puoi quindi concludere che una relazione di proporzionalità diretta fra due grandezze può essere rappresentata nel piano cartesiano da ….., mentre la sua espressione algebrica è …..

2. Proporzionalità inversa[2]

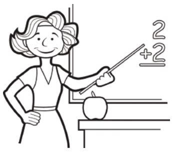
Questo paragrafo, oltre a puntualizzare il concetto di proporzionalità inversa, vuole essere un'introduzione all'iperbole che verrà trattata in una pubblicazione successiva.

L'obiettivo è quello di confrontare fra di loro i vari registri rappresentativi della relazione: i numeri che rappresentano le grandezze ed il loro legame, la formula che rappresenta tale legame, il grafico che è un modello di quest'ultimo.

In genere la comprensione di tale tipo di proporzionalità presenta maggiori ostacoli per gli allievi, perché meno intuitiva di quella diretta. Gli studenti per altro sono abituati a trovarla all'interno di proporzioni senza avere però la consapevolezza precisa del suo significato.

[2] Schede di A. Sargenti, liberamente tratte dalle lezioni di M. Cantoni

Scheda per il docente



- **Nucleo**: numeri e relazioni.
- **Obiettivi**:
  - o Evidenziare la comune relazione (proporzionalità inversa) tra dati che intervengono nell'analisi di alcune situazioni, strutturarla fino ad usare il linguaggio matematico, sia in termini di formule che di grafico.
- **Ordine di scuola**:
  - o scuola secondaria I grado e primo biennio II grado.
- **Descrizione attività**:
  - o si parte dall'analisi di alcuni gruppi di dati (Attività 1): il confronto tra un primo gruppo di dati e ciascuno degli altri porta a scoprire la relazione di proporzionalità che li lega, fino a giungere alla formula che la interpreta. Per rafforzare il concetto, si opera quindi con un processo inverso: l'allievo sarà stimolato a cercare esempi di proporzionalità inversa tra le formule a lui già note dalla matematica, da altre scienze o dalla vita quotidiana.
  - o Da quest'ultima si parte per il lavoro di analisi con GeoGebra (Attività 2). La situazione problema prevede una quota destinata da un nonno a ciascun nipote (numero variabile) a partire da una cifra fissa da suddividere. L'analisi di tali dati porta alla rappresentazione di punti su un ramo di iperbole che può essere evidenziata completamente con l'inserimento della formula che lega le grandezze.
  - o Importante è analizzare i dati sia nella tabella sia nella loro rappresentazione come insieme di punti sul piano cartesiano: due possibilità espressive della relazione di tipo molto diverso ma strettamente collegate fra loro (Attività 3).
- **Indicazioni metodologiche**:
  - o Prerequisito di queste attività è un minimo di capacità di uso del simbolismo algebrico per la traduzione delle relazioni, una conoscenza di base del software per la rappresentazione di grafici e per la gestione di dati nel foglio di calcolo.
  - o Le attività possono essere svolte in coppia o individualmente, ma è sicuramente importante il confronto diretto coi compagni che dovrebbe far parte di un processo che si evolve in una discussione: dall'analisi di una realtà concreta al linguaggio matematico che generalizza le relazioni e le rende adatte ad esprimere una molteplicità di problemi.
  - o Il tipo di problema suggerisce di lavorare inizialmente con numeri interi; possono poi essere considerate altre situazioni (ad esempio individuare possibili valori base-altezza per rettangoli equivalenti) e passare quindi per raffinamenti successivi, a passi decimali dello *slider*: così si ottiene *quasi* un passaggio dal discreto al continuo.
  - o GeoGebra offre poi un ulteriore approfondimento perché il foglio elettronico permette di ampliare automaticamente, con uno *slider*, il dominio delle coordinate dei punti: uscendo dal primo quadrante e sganciando dal contesto i dati iniziali, tali dati divengono quindi *oggetti* astratti. Questo porta a scrivere algebricamente la relazione tra gli insiemi di numeri in gioco, cosa che caratterizza i due rami dell'iperbole e ne determina la sua equazione.

- **Tempi**:
  - o Attività 1: ½ ora.
  - o Attività 2: 1 ora.
  - o Attività 3: ½ ora.

Schede per lo studenteAttività 1, 2, 3.

Per l'Attività 2 sono riportati esempi di videate.

Scheda per lo studente Attività 1

In questa tabella sono riportate, per ciascuna riga, successioni ordinate di numeri.

A	1	2	3	4	5
B	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1
C	20	10	$\frac{20}{3}$	5	4
D	-15	$-\frac{15}{2}$	-5	$-\frac{15}{4}$	-1
E	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{10}$

Sai indicare con quale relazione puoi passare dalla riga A alla riga B? Indica tutte le relazioni che permettono di passare dalla riga A a ciascuna delle altre.

Esprimi a parole come si passa dalla riga A ad un'altra riga qualsiasi della tabella.

Esprimi ora il fatto con una formula matematica (puoi indicare con x il generico termine della riga A, con y quello di un'altra, con k una generica costante).

La relazione che hai trovato e che è un modello per molti fenomeni, matematici e reali, prende il nome di **proporzionalità inversa**.

Pensa a formule a te note, della geometria, della fisica, dell'economia, … : sai individuarne qualcuna che è interpretata dalla proporzionalità inversa?

Esiste qualche relazione per passare anche dalla riga C alla D? e dalla B alla E? e dalla C alla E? Sono dello stesso tipo di quella trovata tra la riga A e le altre?

Completa:

- Per passare da A a C applico la relazione (puoi indicare con a il generico termine di A, con c quello di C) a =…….. ; i valori della riga A e quelli della riga C sono quindi legati da una proporzionalità …
- Per passare da A a E applico la relazione (puoi indicare con a il generico termine di A, con e quello di E) e =……..; i valori della riga A e quelli della riga E sono quindi legati da una proporzionalità …

- Quindi se applico in successione le due relazioni (nella relazione che esprime *e* sostituisci la relazione che esprime *a* in funzione di *c*) *e* =……….

Controlla ora nella tabella se la formula trovata consente di passare da C a E.

La relazione tra due righe, nessuna delle quali sia la A, è pertanto una proporzionalità …

Scheda per lo studente Attività 2[3]

Analizzerai qui le possibili soluzioni del seguente problema:

Nonno Mario ha invitato i suoi 12 nipoti ad una festa per Natale. Ha deciso di distribuire loro complessivamente 2400 € come regalo. Tuttavia non sa quanti dei nipoti verranno effettivamente alla festa, ma vuole comunque distribuire tutta la cifra. Quanto riceverà ciascun nipote in relazione al numero di presenti?

Apri un nuovo file con il Foglio di calcolo, la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Riempi le celle A1:A12 della successione di numeri naturali da 1 a 12, per rappresentare quanti nipoti sono presenti alla festa.

In ciascuna cella corrispondente della seconda colonna poni il risultato della divisione tra 2400 e il valore della casella corrispondente della prima colonna: B1 = 2400 / A1, ecc. Che cosa rappresenta il valore individuato?

Crea una *Lista di punti* con le due colonne.

Come descriveresti la posizione di questi punti sul piano cartesiano?

Disegna alcuni rettangoli che hanno ciascuno come due vertici opposti l'origine degli assi e un punto derivante dalla lista; è necessario poi tracciare per questo punto le parallele agli assi e trovare le intersezioni con questi ultimi per determinare gli altri due vertici. Controlla nella Vista Algebra quanto vale l'area. Che relazione allora c'è tra le basi e le altezze?

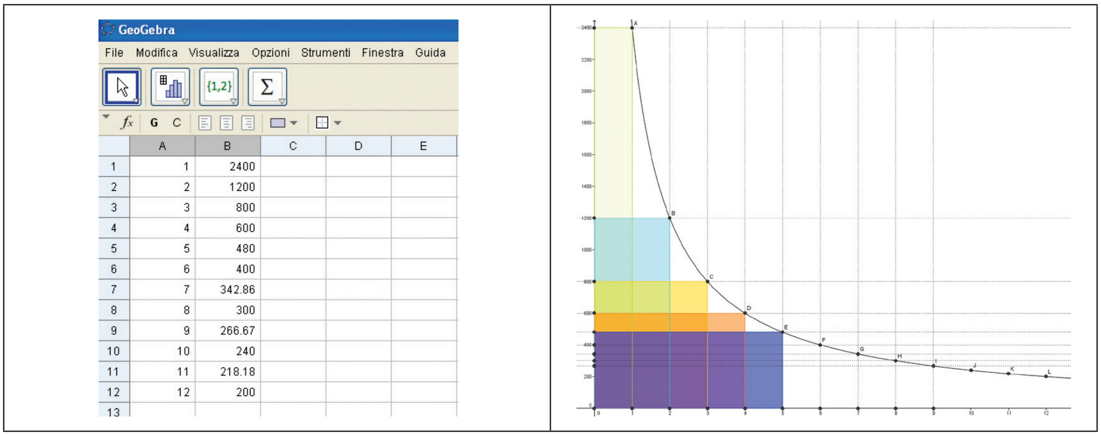
Riporta nella Barra di inserimento la relazione precedentemente inserita nella colonna B, questa volta però utilizzando le variabili x (numero di nipoti), y (cifra individuale). Che cosa osservi nella Vista Grafica? Come puoi descrivere le caratteristiche della curva che appare?

Introduci ora uno *slider* che chiamerai q per esprimere la cifra variabile che il nonno vuole distribuire: ad esempio tra 500 e 4000 con passo 1. Modifica adesso in modo opportuno le formule della colonna B del foglio di calcolo, tenendo conto che la quota da dividere anziché il valore fisso 2400 è rappresentata da …

Modificando il valore di q che cosa effettivamente cambia e che cosa permane?

Al termine salva il file con il nome *nonno.ggb*.

[3] Le istruzioni per l'uso del Foglio di calcolo sono analoghe a quelle della Scheda 2 del paragrafo 1 di questo capitolo. Pertanto non vengono qui ripetute.



Videate Attività 2

Scheda per lo studente Attività 3


Con questa attività potrai generalizzare quanto visto prima, svincolandoti dal problema particolare delle quote regalate dal nonno ai nipoti, quote che possono assumere solo valori positivi.

Apri il file *nonno.ggb*.

Verifica che siano attivi la Vista Grafica, il Foglio di Calcolo, la Vista Algebra; seleziona in quest'ultima *Oggetti ausiliari.*

Rendi visibile A1: nella Vista Grafica appare uno *slider* con questo nome. Prova a farlo variare: che cosa osservi nella Vista Grafica? Come si dispongono i punti?

Lo *slider* può assumere tutti i valori reali?

Puoi quindi concludere che una relazione di proporzionalità inversa fra due grandezze può essere rappresentata nel piano cartesiano da ….., mentre la sua espressione algebrica è …..

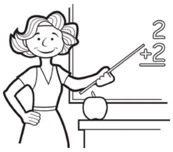
3. Dipendenza lineare[4]

Un misconcetto che si genera sovente negli allievi è l'associazione della relazione di proporzionalità diretta al grafico di una qualunque retta del piano cartesiano, anche non passante per l'origine degli assi. Questo porta successivamente ad errori in esercizi in cui sono coinvolte rette non passanti per l'origine, in particolare per quanto riguarda la pendenza.

In questo paragrafo si vuole dunque puntualizzare questo concetto, dimostrando che l'appartenenza di punti al grafico di una retta non è condizione sufficiente per la proporzionalità diretta tra le rispettive coordinate. Si vogliono inoltre mettere in evidenza le differenti relazioni tra grandezze direttamente proporzionali e linearmente dipendenti, facendo vedere che le seconde possono essere ricondotte alle prime.

[4] Schede di A. Sargenti

Scheda per il docente



- **Nucleo**: numeri e relazioni.
- **Obiettivi**:
  - o Evidenziare le differenze tra proporzionalità diretta e dipendenza lineare.
  - o Interpretare geometricamente la variazione lineare.
  - o Riconoscere quando grandezze sono legate da questa relazione.
- **Ordine di scuola**:
  - o primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**:
  - o Si parte dall'analisi di dati legati da una dipendenza lineare (Attività 1): la rappresentazione grafica (retta) porta ad evidenziare che non è sufficiente quest'ultima condizione perché si possa parlare di proporzionalità diretta.
  - o Viene però cercato un aggancio a quest'ultima relazione, prima graficamente attraverso quella che può essere considerata una traslazione, poi algebricamente attraverso una differenza.
  - o Da questo primo approccio al significato di dipendenza lineare, si passa poi (Attività 2) alla definizione di pendenza attraverso il rapporto costante delle differenze, che risulterà utile nel successivo capitolo, quando si parlerà di equazione della retta.
- **Indicazioni metodologiche**:
  - o prerequisito di queste attività è l'aver svolto la attività del paragrafo 1 relative alla proporzionalità diretta.
- **Tempi**:
  - o Attività 1: 1ora.
  - o Attività 2: ½ ora.

 Schede per lo studente Attività 1 e 2.

Per l'Attività 1 e 2 sono riportati esempi di videate.

Scheda per lo studente Attività 1[5]

Apri un nuovo file con il Foglio di calcolo e la Vista Grafica.

Riporta nella colonna A del foglio di calcolo la successione di valori che parte da -3 e arriva a +3 con passo 0.5.

[5] Alcune istruzioni per l'uso del Foglio di calcolo sono simili a quelle della schede dei paragrafi precedenti di questo capitolo. Pertanto non vengono qui ripetute.

Inserisci nelle celle corrispondenti della colonna B la successione di valori da 0 a 12 con incremento 1.

Rappresenta ora questi valori come punti del piano cartesiano, creando una *Lista di punti.*

Come descriveresti la posizione di questi punti?

Ritieni che le due colonne del foglio di calcolo (A e B) rappresentino grandezze direttamente proporzionali? Motiva la risposta.

Riesci ad individuare un qualche legame tra i valori della colonna A e quelli della colonna B? Riporta questa relazione nella *Barra di inserimento* utilizzando le variabili x (per la colonna A) e y (per la colonna B).

Che cosa osservi nella Vista Grafica?

Il grafico ottenuto interseca l'asse delle y? Se sì, chiama T il punto di intersezione.

Traccia la parallela all'asse x passante per T.

Fai ora una costruzione simile a quella fatta per la proporzionalità diretta. Disegna alcuni triangoli rettangoli che hanno come estremi dell'ipotenusa il punto T e un punto derivante dalla lista (il terzo vertice del triangolo si trova su … e quindi si ottiene come intersezione di questa retta e della perpendicolare all'asse delle ascisse passante per …). Come sono questi triangoli?

Per riportarci alla situazione vista con la proporzionalità diretta, con quale trasformazione geometrica occorre dunque operare? Questa trasformazione corrisponde algebricamente a operare sui valori della colonna B con l'operazione di……..

Riporta allora nella colonna C del foglio di calcolo la formula che consente di ricavare da ciascun valore della colonna B il nuovo valore ottenuto con la trasformazione.

La relazione analizzata in questa attività prende il nome di **dipendenza lineare**; è riconducibile alla proporzionalità diretta solo se … Essa è rappresentabile con una retta che in genere non passa per l'origine degli assi.

Al termine salva il file.

Scheda per lo studente Attività 2

Apri il file dell'attività precedente con il Foglio di calcolo.

Nella colonna E inserisci ad esempio le seguenti differenze:

in E1	in E2	in E3	in E4	in E5	in E6
A2-A1	A4-A1	A5-A3	A6-A2	A13-A8	A12-A6

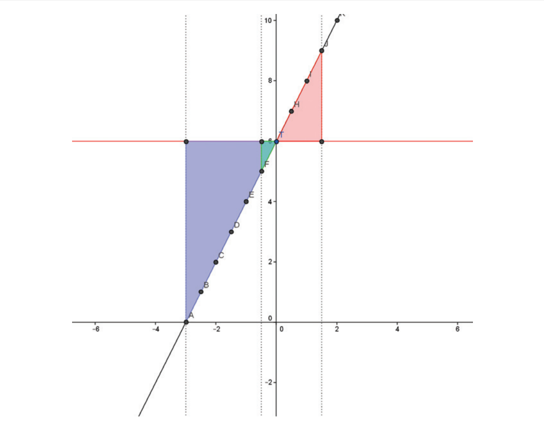
Evidenzia ora le sei celle e trascina l'angolo in basso a destra verso la colonna F per copiare le formule. Controlla con il mouse il contenuto delle celle attraverso il *tool tip*: quali formule ci sono nella colonna F?

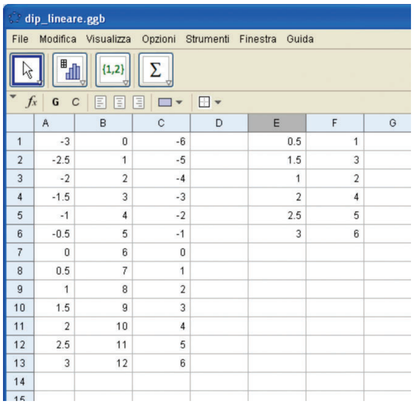
Osserva ora i valori che si sono venuti a formare: che relazione c'è tra i dati della colonna E e quelli della colonna F?

Ritrovi qualche corrispondenza con quanto visto prima?

Cerca di esprimere a parole e con una relazione quest'altra proprietà che caratterizza la variazione lineare.

Al termine salva il file.





	A	B	C	D	E	F	G
1	-3	0	-6		0.5	1	
2	-2.5	1	-5		1.5	3	
3	-2	2	-4		1	2	
4	-1.5	3	-3		2	4	
5	-1	4	-2		2.5	5	
6	-0.5	5	-1		3	6	
7	0	6	0				
8	0.5	7	1				
9	1	8	2				
10	1.5	9	3				
11	2	10	4				
12	2.5	11	5				
13	3	12	6				
14							

Videate Attività 1e 2

CAPITOLO 6

Come varia un fenomeno: modelli di funzione
Funzioni lineari e quadratiche

Introduzione

Il *pensiero funzionale* è uno degli strumenti concettuali che meglio si prestano ad interpretare una realtà in continua e rapida evoluzione. La matematica ha dato forma a questa modalità di pensiero sviluppando il concetto di funzione, che consente di modellizzare situazioni relative a grandezze che variano. Sappiamo che l'evoluzione storica della teoria relativa alle funzioni è stata lunga e tortuosa; un impulso significativo si è avuto con l'introduzione della notazione algebrica e della rappresentazione cartesiana. L'argomento va quindi trattato didatticamente con consapevolezza delle difficoltà che gli allievi possono incontrare nell'affrontare i diversi registri rappresentativi e – contemporaneamente – con attenzione alle radici cognitive del concetto di funzione, connesse soprattutto con il movimento e, più in generale, con l'evoluzione di fenomeni nel tempo. Le proposte di progetti strutturati come m@t.abel suggeriscono di partire sempre dall'osservazione qualitativa di grandezze che variano per passare poi alle rappresentazioni più opportune, verbali, numeriche, grafiche o simboliche; solo in un secondo momento si passerà ad una sistemazione teorica dell'argomento.

In questo ambito diamo per scontata l'esperienza degli studenti nell'approccio al concetto di funzione e mettiamo a fuoco il segmento didattico in cui viene costruito in classe il *kit* di funzioni rappresentative di diversi modelli reali: lineari e quadratiche in questo capitolo, esponenziali e periodiche in un capitolo di un successivo volume. Il software GeoGebra ci aiuta a costruire rappresentazioni funzionali ma, soprattutto, a confrontare i diversi registri rappresentativi per favorire quella 'forte connessione fra il grafico di una funzione, l'interpretazione dell'andamento, il collegamento di questo con l'espressione algebrica della funzione, gli aspetti numerici e l'analisi di momenti particolari di questo andamento che corrispondono agli zeri (equazioni) e al segno (disequazioni)'[1].

Riferimenti alle indicazioni ministeriali

Riferimenti alle Indicazioni ministeriali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Primo biennio

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.

[1] La frase è tratta da La Matematica per il cittadino – Matematica 2003, pag 206

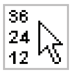
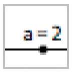
- Lo studente studierà le funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = |x|$, $f(x) = a/x$, $f(x) = x^2$ sia in termini strettamente matematici sia in funzione della descrizione e soluzione di problemi applicativi. […] Sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati. (*Indicazioni nazionali per i Licei*)
- Lo studente apprenderà a analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche. (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*)

Secondo biennio

- Lo studente apprenderà lo studio delle funzioni quadratiche; a risolvere equazioni e disequazioni di secondo grado e rappresentare e risolvere problemi utilizzando equazioni di secondo grado. (*Indicazioni nazionali per i Licei*)

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Registra su foglio di calcolo	
Slider	

Strumenti	*Icone*
Crea lista punti	

OSSERVAZIONE 1: GeoGebra consente di memorizzare in una o più colonne del Foglio di calcolo i valori assunti da un oggetto/più oggetti in movimento nella Vista Grafica. Deve essere visualizzato il Foglio di calcolo. La modalità viene attivata nei seguenti modi:

- Con il tasto destro del mouse sull'oggetto si sceglie il comando *Registra sul foglio di calcolo*
- Selezionando lo strumento *Registra su foglio di calcolo* nella finestra della prima icona del menu e poi cliccando sull'oggetto.

Nella finestra di dialogo attivabile nella testata della colonna, è possibile selezionare alcune opzioni.

OSSERVAZIONE 2: per creare una lista di punti da visualizzare sul piano cartesiano è necessario prima selezionare i dati da due colonne; il numero di dati selezionati deve essere uguale per entrambe le colonne. Anziché lo strumento, è possibile agire con il tasto destro mouse sulla selezione *Crea/Lista di punti*.

Proprietà degli oggetti di GeoGebra

Elimina etichettatura per i nuovi oggetti	Dalle *Proprietà* della Vista Grafica *Opzioni / Etichettatura / Nessun nuovo oggetto*

Comandi GeoGebra con inserimenti nella barra apposita:

Se	Consente di definire funzioni solo per condizioni stabilite. *Se* [condizione, allora valore/funzione] significa che l'oggetto è definito come valore o funzione solo quando la condizione è vera; oppure *Se* [condizione, allora valore$_1$/funzione$_1$, altrimenti valore$_2$/funzione$_2$] significa che l'oggetto è definito come valore$_1$ o funzione$_1$ solo quando la condizione è vera; in caso contrario vale valore$_2$ o funzione$_2$.
pedice	Talvolta può essere opportuno differenziare le variabili con pedici. Questi si realizzano utilizzando il trattino basso (_). Ad esempio volendo far comparire x_0, si deve scrivere x_0.

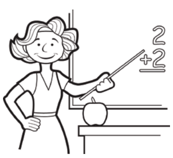
1. Il modello lineare[2]

La funzione lineare può essere introdotta attraverso situazioni – problema. Dal modello grafico lo studente, adeguatamente guidato, coglierà la regolarità dell'allineamento di punti, e gli aspetti di crescita o decrescita del fenomeno; interrogando la tabella numerica potrà rispondere a quesiti specifici del problema ma anche individuare regolarità nel rapporto incrementale ed associare quest'ultimo alla rapidità di crescita o decrescita del grafico; la forma algebrica infine, esprimerà in forma sintetica tutte le proprietà della funzione.

Il problema che proponiamo qui è tratto dalle prove Invalsi per il secondo anno della scuola secondaria superiore. Liberamente adattato, si presta a costruire dapprima la tabella numerica di una funzione lineare in un Foglio di calcolo e a riportare quindi le coppie numeriche ottenute su un grafico cartesiano; l'alternanza dei due registri rappresentativi consente di cogliere aspetti rilevanti del problema. La descrizione simbolica delle regolarità osservate, richiesta in un secondo momento, aprirà la strada all'indagine sulla forma algebrica di una funzione lineare e sul significato dei parametri che compaiono nella sua espressione.

Da segnalare, per una progettazione più completa del percorso didattico, l'attività m@t.abel *Allineamenti – esploriamo le funzioni lineari.*

Scheda per il docente



- **Nucleo**: relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - o Approfondire il concetto di funzione lineare come modello di situazioni reali.
  - o Scegliere la rappresentazione opportuna di una funzione lineare; trarre informazioni da rappresentazioni diverse della stessa funzione.

[2] Le schede 1, 2 e 3 sono di P. Accomazzo; le schede 4 e 5 sono tratte dalla sperimentazione di F. Bologna.

- Data l'equazione di una funzione lineare nella forma $y = m\,x + q$ comprendere il ruolo dei parametri m e q in relazione al grafico corrispondente.

- **Ordine di scuola**:
  - Attività 1, 2 e 3: biennio scuola secondaria II grado.
  - Attività 4 e 5: classe III scuola secondaria di primo grado; biennio scuola secondaria II grado.

- **Descrizione attività**:
  - Attività 1: da un quesito SNV per la classe II superiore; confronto grafico e numerico di due funzioni lineari con dominio discreto.
  - Attività 2: dalla formula al grafico di una funzione lineare.
  - Attività 3: da un quesito SNV per la classe III della secondaria di primo grado. Confronto fra grafici di funzioni lineari diverse di cui è data la formula.
  - Attività 4: esplorazione di grafici di funzioni aventi formule di tipo $y = m\,x$.
  - Attività 5: esplorazione di grafici di funzioni aventi formule di tipo $y = m\,x + q$, con m costante e q variabile.

- **Indicazioni metodologiche**:

  Le schede di lavoro proposte, che gli studenti possono svolgere a piccoli gruppi (2/3) precedono la sistemazione dei concetti. Nelle prime tre schede si parte da una situazione – problema modellizzabile attraverso una funzione lineare. Si richiede agli studenti di esplorare il modello con il software GeoGebra e di riportare per scritto le proprie considerazioni.

  Le schede successive partono dalla rappresentazione algebrica di una funzione lineare nella forma $y = m\,x + q$ e propongono un'esplorazione grafica volta a dare significato ai valori dei parametri m e q. Lo strumento *slider* è un vero punto di forza nella rappresentazione dinamica per la semplicità con cui permette di assegnare diversi valori ad un parametro e, di conseguenza, di visualizzare molteplici configurazioni del problema legate a quel parametro. I concetti di variabile e parametro meritano in verità considerazioni più ampie e ad essi sarà dedicato un capitolo apposito. Per il momento ci si accontenta di indicare come costruire e dimensionare uno *slider* che permetta di associare alla formula di una funzione lineare il grafico corrispondente; per evitare confusioni si sceglie di far variare un parametro alla volta.

  Non è riportata una scheda specifica con m variabile e q costante e diverso da zero, facilmente costruibile sullo stile delle schede precedenti.

  Come sempre, è molto importante che al termine del lavoro ci sia una comunicazione in cui ciascun gruppo indica ciò che ha osservato e come ha risposto ai quesiti: sarà cura del docente operare una sintesi sul lavoro svolto.

- **Tempi**:
  - Attività 1: 1 ora.
  - Attività 2 e 3: 1 ora e 30'.
  - Attività 4 e 5: 1 ora e 30'.

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4 e 5.

Sono riportati gli esempi più significativi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Problema[3]

Mario va in vacanza in una località sciistica. Per usufruire degli impianti di risalita (seggiovie, funivie,…), può scegliere tra due offerte, A e B, entrambe valide per tutta la stagione invernale.

Offerta A: costo iniziale fisso di 100 euro più 15 euro per ogni giornaliero (ossia per ogni giorno in cui si usano gli impianti di risalita).

Offerta B: 30 euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale.

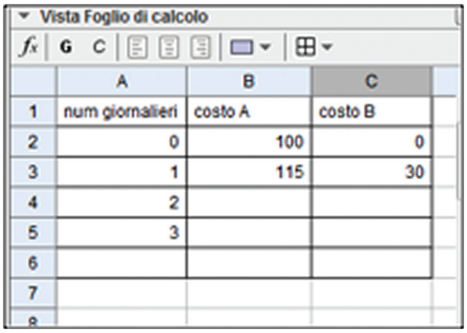
Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?

Qual è il numero dei giornalieri per cui il costo dell'offerta B è una volta e mezza il costo dell'offerta A?

Apri in un nuovo file la Vista Algebra, la Vista Grafica con gli assi e la Vista Foglio di calcolo.

Costruisci una tabella che riassuma i costi relativi alle offerte A e B al variare del numero di giornalieri acquistati.

Nella prima colonna del Foglio di calcolo, inserisci i numeri naturali da 0 a 25, che rappresentano il numero di giornalieri acquistabili. Riporta nelle due colonne adiacenti i costi relativi all'offerta A e all'offerta B relativamente al numero di giornalieri acquistati, completando una tabella analoga alla seguente:



	A	B	C
1	num giornalieri	costo A	costo B
2	0	100	0
3	1	115	30
4	2		
5	3		
6			
7			

Rappresenta le due offerte su un grafico cartesiano.

Per l'offerta A

- Seleziona i dati della prime due colonne, a partire dalla cella A2 sino alla cella B27.
- Con il tasto destro del mouse sulla selezione, *Crea* una *Lista di punti*.
- Modifica adeguatamente la scala della Vista Grafica per visualizzare sull'asse x i primi 25 numeri naturali e sull'asse y valori numerici che comprendano tutti i punti del grafico.
- Modifica il formato dei punti: elimina le etichette (puoi farlo una volta per tutte, prima di creare la Lista punti: nella Vista Grafica, vai su *Opzioni*, *Etichettatura*, e spunta *Nessun nuovo oggetto*); seleziona quindi un colore opportuno per l'offerta A.

[3] Il problema è tratto dalle prove SNV 2011/2012 per la classe II della scuola secondaria e liberamente adattato.

Passa ora a visualizzare l'offerta B.

- Seleziona i dati della prima colonna, a partire dalla cella A2 sino alla cella A27; tenendo premuto il tasto Ctrl, seleziona i dati della terza colonna sino alla cella C27.
- Con il tasto destro del mouse sulla selezione*, Crea* una *Lista di punti.*
- Aggiusta adeguatamente la Vista Grafica per visualizzare tutti i punti.
- Modifica il formato dei punti, selezionando un colore opportuno per l'offerta B.

Osservando grafico e tabella rispondi ora alle seguenti domande:

Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?

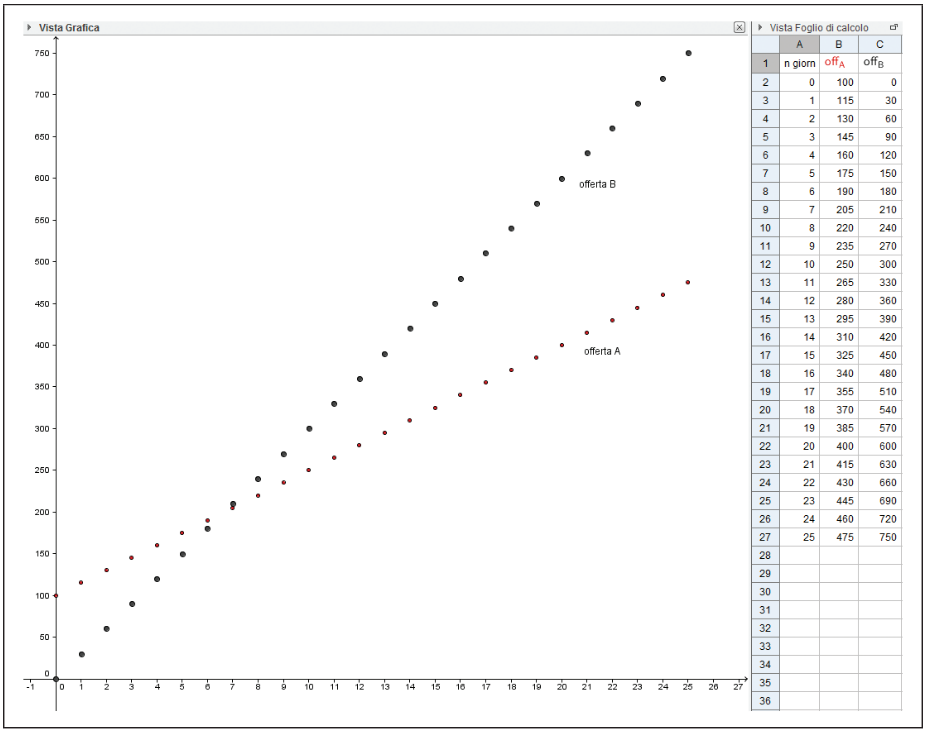
Qual è il numero dei giornalieri per cui il costo dell'offerta B è una volta e mezza il costo dell'offerta A? (tieni presente che sul Foglio di Calcolo puoi effettuare altri calcoli oltre quelli indicati)

Scrivi due formule, una per l'offerta A ed una per l'offerta B, che esprimano il costo *c* al variare del numero di giornalieri *g*:

Offerta A: *c* =........

Offerta B: *c* =........

Salva il file che hai costruito.



	A	B	C
1	n giorn	off_A	off_B
2	0	100	0
3	1	115	30
4	2	130	60
5	3	145	90
6	4	160	120
7	5	175	150
8	6	190	180
9	7	205	210
10	8	220	240
11	9	235	270
12	10	250	300
13	11	265	330
14	12	280	360
15	13	295	390
16	14	310	420
17	15	325	450
18	16	340	480
19	17	355	510
20	18	370	540
21	19	385	570
22	20	400	600
23	21	415	630
24	22	430	660
25	23	445	690
26	24	460	720
27	25	475	750
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			

Videata Attività 1

Scheda per lo studente Attività 2


Problema

La formula $l = 15 + 0.5\ P$ esprime l'allungamento, in cm, di una molla a cui è stato applicato un peso P in ettogrammi.

Quale peso occorre applicare alla molla perché la sua lunghezza totale superi i 30 cm?

Apri in un nuovo file la Vista Algebra, la Vista Grafica con gli assi e la Barra di inserimento.

Risolvi il problema graficamente, visualizzando il grafico della funzione con GeoGebra.

Ricorda che la variabile indipendente (in questo caso il peso dell'oggetto applicato alla molla) deve essere indicata con x; la variabile dipendente (la lunghezza totale della molla) va indicata con y.

Rifletti sul Dominio della funzione: x non può essere negativa!

Scrivi quindi nella barra di inserimento la formula y=15+0.5x, limitata al Dominio x≥0, usando il comando *Se*:

y=Se[*x*>=0, 15+0.5*x*]

Disegna sullo stesso piano la retta $y = 30$; individua le coordinate del punto A intersezione di questa retta con il grafico precedente (modifica eventualmente la Vista Grafica in modo da visualizzare la parte di piano utile a mostrare questa intersezione). Quale significato hanno le coordinate del punto A? Qual è la risposta al quesito posto dal problema?

Scheda per lo studente Attività 3


Problema[4]

La formula $l = l_0 + k \cdot P$ esprime la lunghezza l di una molla al variare del peso P applicato. l_0 rappresenta la lunghezza 'a riposo' della molla; k indica di quanto si allunga la molla quando si applica un'unità di peso.

Analizza l'entità dell'allungamento della molla al variare dei coefficienti l_0 e k; descrivi come il valore di tali coefficienti influenzi l'allungamento della molla.

Rispondi quindi al quesito sotto indicato.

Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione: 'È una molla molto corta e molto dura, cioè resistente alla trazione':

A. $l = 10 + 0{,}5 \cdot P$

B. $l = 10 + 7 \cdot P$

C. $l = 80 + 0.5 \cdot P$

D. $l = 80 + 7 \cdot P$

[4] Il quesito è tratto dalle prove SNV 2010/2011 per la classe III della scuola secondaria di primo grado.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra, la Vista Grafica con gli assi e la Barra di inserimento.

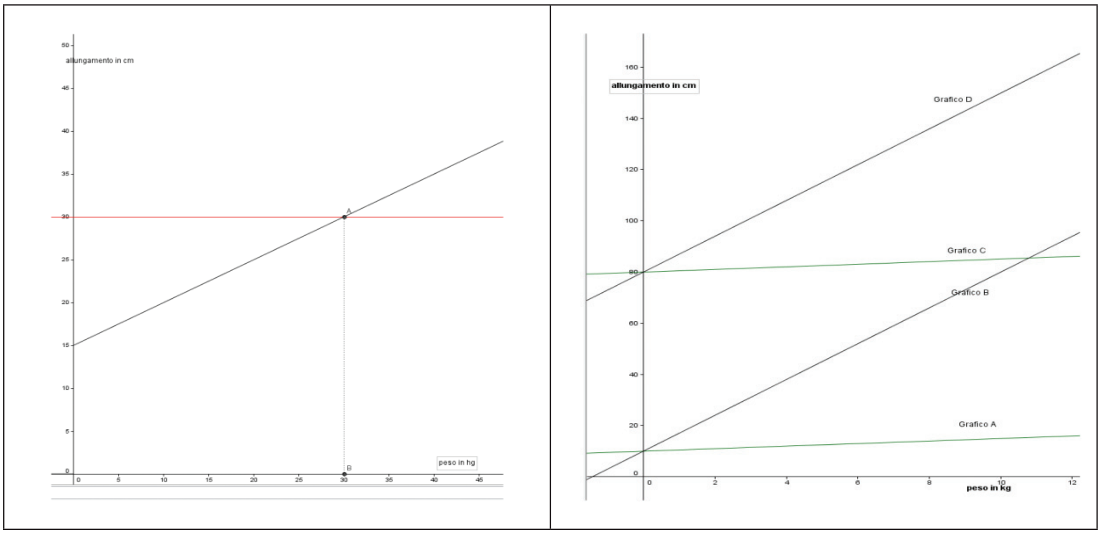
Visualizza i grafici A, B, C e D delle quattro funzioni, ricordando di delimitare il Dominio ad $x \geq 0$.

Supponi che le lunghezze siano misurate in cm ed i pesi in kg.

Ricorda che per scrivere le formule delle funzioni in GeoGebra dovrai sostituire la variabile indipendente P con x e la variabile dipendente l con y.

Con riferimento ai grafici:

- che relazione c'è fra i grafici A e B? E fra i grafici B e D?
- quali informazioni sulla molla può dare l'ordinata del punto di intersezione del grafico con l'asse y?
- osserva i grafici A e B: quale dei due cresce più rapidamente? Da quale valore della formula dipende la crescita più rapida? Ritornando al problema dell'allungamento della molla, quale caratteristica fisica determina la maggiore o minore rapidità di crescita del grafico?



Videate Attività 2 e 3

Scheda per lo studente Attività 4


Apri in un nuovo file la Vista Algebra, la Vista Grafica con gli assi e la Barra di inserimento.

Disegna il grafico delle seguenti equazioni:

a. $y = 2x$

b. $y = 3x$

c. $y = - 2x$

d. $y = - 4x$

Per ciascuno di essi indica in quali quadranti è contenuto e se cresce o decresce al crescere di x.

Sai che il modello di una funzione lineare è $y = m\ x + q$; quanto vale q nelle quattro funzioni?

C'è un punto del piano per cui passano tutti e quattro i grafici?

Disegna ora, nello stesso piano, diverse funzioni di equazione $y = m\ x$.

A questo proposito predisponi uno *slider* per il parametro m:

- seleziona il comando *slider* e fai click in un punto in alto a destra della Vista Grafica;
- all'apertura della casella di dialogo indica il nome m dello *slider*;
- indica l'intervallo di variazione: da -20 a 20 con incremento 0.1. Potrai esaminare in tal modo un'intera gamma di funzioni lineari con lo stesso valore di q.

Nella barra di inserimento scrivi la formula della funzione: $y = m\ x$ (ricorda di lasciare uno spazio fra le due lettere m ed x oppure di inserire fra di esse il simbolo * di prodotto).

Fai variare sullo *slider* il valore di m ed osserva l'andamento dei grafici; descrivi che cosa succede per

- $m > 0$
- $m < 0$
- $m = 0$

Pensi che si riesca a trovare un valore di m per il quale il grafico si sovrappone all'asse y? Per esplorazioni ulteriori puoi cambiare l'intervallo di variazione di m: con il tasto destro del mouse sullo *slider* seleziona *Proprietà*, *slider* e cambia i valori di minimo e massimo.

Puoi individuare una proprietà generale per i grafici la cui formula è di tipo $y = m\ x$?

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 5


Apri in un nuovo file la Vista Algebra, la Vista Grafica con gli assi e la Barra di inserimento.

Disegna il grafico delle seguenti equazioni:

a. $y = 2x + 1$

b. $y = 2x + 2$

c. $y = 2x + 3$

d. $y = 2x - 8$

Che cosa osservi dai grafici ottenuti?

Quanto vale il parametro m nelle quattro equazioni?

Quanto valgono i parametri q nelle quattro equazioni?

Sapresti indicare una proprietà generale sul significato grafico dei valori di q?

Disegna ora, nello stesso piano, diverse funzioni di equazione $y = 2x + q$.

A questo proposito predisponi uno *slider* per il parametro q:

- seleziona il comando *slider* e fai click in un punto in alto a destra della Vista Grafica;
- all'apertura della casella di dialogo indica il nome q dello *slider*;
- indica l'intervallo di variazione: da -10 a 10 con incremento 0.1. Potrai esaminare in tal modo un'intera gamma di funzioni lineari con lo stesso valore di m mentre q varia.

Nella barra di inserimento scrivi la formula della funzione: $y = 2x + q$.

Fai variare sullo *slider* il valore di q ed osserva l'andamento dei grafici; descrivi che cosa succede per

- $q > 0$
- $q < 0$
- $q = 0$

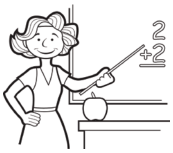
Puoi individuare una proprietà generale per i grafici nella cui formula compare lo stesso valore di m?

Salva il file che hai costruito.

2. Il modello quadratico[5]

Anche il modello quadratico può essere riferito a situazioni – problema che ne giustifichino l'inserimento e lo studio: l'attività m@t.abel *Aree e pavimentazioni – esploriamo le funzioni quadratiche* fornisce buoni spunti di lavoro in questo senso. Nel rimandare quindi a tale attività e alle altre ad essa collegate per un discorso più completo sulle funzioni quadratiche, focalizziamo l'attenzione sull'andamento dei grafici in relazione al valore numerico dei parametri a, b e c della formula $y = ax^2 + bx + c$, non senza fornire spunti per un'indagine sulle modalità di crescita/decrescita di una funzione quadratica attraverso l'analisi delle differenze prime. Al termine sono inseriti alcuni esempi di uso della funzione quadratica per studiare le variazioni di grandezze in problemi geometrici.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - o Comprendere come una funzione quadratica possa costituire un modello attraverso il quali è possibile studiare situazioni reali.

[5] Le schede 1, 2 e 7 sono di P. Accomazzo; le schede 3, 4, 5, 6 sono tratte dalla sperimentazione di F. Giustino.

- Realizzare che una funzione quadratica non cresce/decresce linearmente.
- Data la formula $y = ax^2 + bx + c$ individuare il ruolo dei parametri a, b e c in relazione al grafico corrispondente.

- **Ordine di scuola**:
  - Attività 1, 2 e 3, 4, 5, 6, 7: scuola secondaria II grado.

- **Descrizione attività**:
  - Attività 1: da un quesito SNV per la classe II superiore; indagine di una situazione di variabilità data la notazione algebrica della funzione e la sua rappresentazione grafica.
  - Attività 2: con riferimento al problema dell'attività 1 si esplora come cresce il fenomeno in questione attraverso l'analisi delle differenze prime.
  - Attività 3: come cambia il grafico di $y = ax^2$ al variare di a in $\boldsymbol{R}$; concavità e ampiezza di una parabola.
  - Attività 4: come cambia il grafico di $y = ax^2 + bx$, con a costante, al variare di b in $\boldsymbol{R}$; equazione dell'asse di simmetria e coordinate del vertice. Gli zeri della funzione.
  - Attività 5: come cambia il grafico di $y = ax^2 + bx + c$, con a e b costanti, al variare di c in $\boldsymbol{R}$; intersezione della parabola con l'asse y. Zeri della funzione e equazione corrispondente; significato geometrico del discriminante dell'equazione.
  - Attività 6: un problema di variazione dell'area di un rettangolo che dà origine ad una funzione quadratica.
  - Attività 7: dai Giochi di Archimede 2008, la ricerca delle radici intere di un'equazione parametrica di secondo grado.

- **Indicazioni metodologiche**:

Le situazioni problema proposte sfruttano le potenzialità dinamiche di GeoGebra per indurre gli allievi a formulare congetture sulle grandezze che variano. Si intende in tal modo far precedere alla trattazione sistematica del tema un'attività di manipolazione, esplorazione e scoperta, un'analisi qualitativa dei grafici in relazione alle formule ed alle tabelle numeriche. E' consigliato, come sempre, che queste attività di esplorazione avvengano a piccoli gruppi e siano seguite da una discussione che favorisca la condivisione dei risultati ottenuti e l'acquisizione di una terminologia compresa e accettata da tutti gli studenti.

Le proposte di lavoro fanno largo uso di *slider* o di punti mobili su segmenti per esaminare situazioni variabili; questa facilità di cambiare configurazione, unita all'immediatezza con cui i diversi registri rappresentativi di una funzione possono essere affiancati, è il vero punto di forza di GeoGebra, e fa la sostanziale differenza con uno studio statico di una funzione.

Teniamo presente che, nel passaggio dallo studio delle funzioni lineari alle quadratiche, la complessità aumenta notevolmente; una buona comprensione del significato dei parametri di una funzione di secondo grado anche in relazione all'aspetto grafico, del ruolo di particolari punti del grafico, quali i punti di intersezione con gli assi, del significato di valori numerici come il discriminante renderanno più semplice lo studio e la risoluzione di equazioni e disequazioni di secondo grado. Si sottolinea in particolare come nell'attività 3 vengano introdotti termini come *concavità* con un significato inizialmente intuitivo; sarà cura dell'insegnante verificare che il senso intuitivo che gli studenti danno ai termini sia corretto, affinando via via le definizioni con il proseguire del percorso didattico.

Nel paragrafo corrente le equazioni e le disequazioni non sono trattate in modo sistematico; tuttavia, come frequentemente raccomandato nelle proposte didattiche di Matematica 2003 o di m@t.abel, compaiono qua e là nei vari quesiti richieste che potrebbero essere formalizzate in equazioni e disequazioni. Richiamando ancora Matematica 2003, è opportuno proporre '*una forte connessione fra il grafico di una funzione, l'interpretazione dell'andamento, il collegamento di questo con l'espressione algebrica della funzione, gli aspetti numerici, e l'analisi di momenti particolari di questo andamento che corrispondono agli zeri (cioè alle equazioni), al segno (cioè alle disequazioni). […] Ciò non vuol dire che non si possa parlare di equazioni e sistemi indipendentemente dallo studio delle funzioni, ma che, laddove possibile, si cerchi di favorire l'interazione con la rappresentazione geometrica*'[6].

Proprio secondo l'ottica dell'esplorazione della funzione quadratica si suggerisce di trattare il quesito dell'attività 7, in cui è richiesto di individuare per quali e quanti valori di un parametro *b* una determinata equazione parametrica di secondo grado con il primo e terzo coefficiente costanti abbia radici intere. Dall'esplorazione grafica e numerica gli allievi possono intuire il legame che c'è fra somma e prodotto di radici e coefficienti dell'equazione; questo esercizio può quindi introdurre alle suddette relazioni, che andranno poi dimostrate e generalizzate.

- **Tempi**:
  - Attività 1: 1 ora.
  - Attività 2: 1 ora.
  - Attività 3: 1 ora.
  - Attività 4: 1 ora.
  - Attività 5: 1 ora.
  - Attività 6: 1 ora e 30'.
  - Attività 7: 1 ora e 30'.


Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Sono riportati gli esempi più significativi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Problema[7]

Con *spazio di frenata* intendiamo lo spazio che un'auto percorre dall'inizio della frenata fino a quando si ferma.

Una regola pratica per stimare lo spazio di frenata (in metri), nel caso in cui l'auto viaggi su una strada asfaltata in buone condizioni e non bagnata, è la seguente:

[6] Matematica 2003, Relazioni e funzioni, Introduzione ed elenco delle attività.

[7] Il quesito è tratto dalle prove SNV 2011/2012 per la classe II della scuola secondaria di secondo grado.

‘Eleva al quadrato il valore della velocità (in km/h) dell’auto all’inizio della frenata e dividi il risultato ottenuto per 200’.

Senza aprire GeoGebra prova a rispondere al quesito seguente:

Quale fra i seguenti grafici può rappresentare lo spazio di frenata s al variare della velocità v?

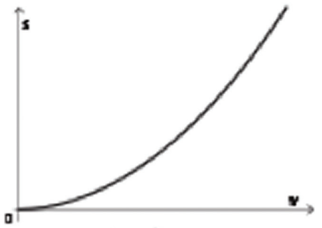


Grafico 1

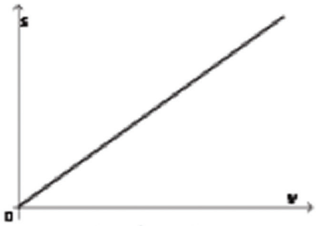


Grafico 2

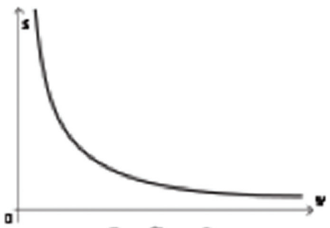


Grafico 3

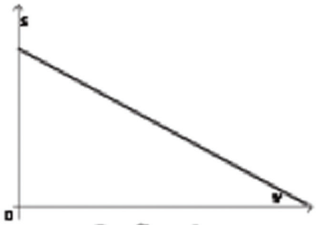


Grafico 4

Riprendi il testo del problema precedente; esplora con GeoGebra come varia lo spazio di frenata al variare della velocità a cui sta viaggiando l’auto. Potrai così verificare la correttezza delle risposte che hai dato ai due quesiti del problema e scoprire nuove informazioni.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra, la Vista Grafica con gli assi e la Barra di inserimento.

Scrivi la formula della funzione che mette in relazione la velocità di un’auto x, in km/h, con lo spazio di frenata y, in metri: y =…….. , con $x > 0$.

Riporta la formula nella barra di inserimento. Per limitare il dominio della funzione alle ascisse positive puoi usare il comando Se […] , ovvero y = Se [$x > 0$, …].

Modifica la scala della Vista Grafica in modo tale da visualizzare la distanza di frenata per velocità fino ad 100 km/h.

A quale velocità ha iniziato a frenare un’auto il cui spazio di frenata è di 25 metri?

Spiega il procedimento che hai seguito per rispondere a questa domanda.

Rifletti ora su come aumenta lo spazio di frenata all’aumentare della velocità:

- se la velocità dell’auto passa da 10 a 20 km/h lo spazio di frenata passerà da … a …metri
- se la velocità dell’auto passa da 80 a 90 km/h lo spazio di frenata passerà da … a …metri

Si può dire che l’aumento dello spazio di frenata sia lo stesso nei due casi?

Salva il file che hai costruito con il nome di *Distanza_di_frenata*.

Scheda per lo studente Attività 2

Sempre a partire dal problema della Scheda 1 esamina in modo sistematico come aumenta lo spazio di frenata di un'auto all'aumentare della velocità.
Allo scopo ti è richiesto di completare la tabella seguente, con l'aiuto di GeoGebra.
Tabella A

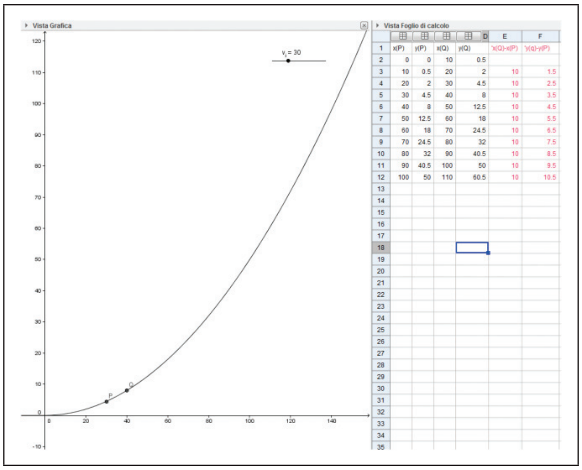
Velocità in km/h, da – a	Incremento della velocità in km/h	Incremento dello spazio di frenata in m
0 – 10		
10 – 20		
20 – 30		
30 – 40		
40 – 50		
50 – 60		
…		
…		
90 – 100		

Apri il file *Distanza_di_frenata* che hai costruito nella scheda precedente e inserisci la Vista Foglio di calcolo.
Raccogli sul Foglio di calcolo i dati riguardanti lo spazio di frenata dell'auto per velocità da 0 a 100 km, con incremento di 10 km/h:

- Predisponi uno *slider* v_i che vari da 0 a 100 con incremento 10.
- Nella barra di inserimento inserisci, attraverso le sue coordinate, il punto P che sta sulla curva disegnata ed ha ascissa v_i (come indicare l'ordinata di P?).
- Nella barra di inserimento inserisci, attraverso le sue coordinate, il punto Q che sta sulla curva disegnata ed ha ascissa v_i+10.
- Apri la Vista Foglio di calcolo.
- Con il tasto destro sul punto P, seleziona *Registra su foglio di calcolo*, in modo da raccogliere le coordinate del punto P, al suo variare, nelle colonne A e B.
- Con il tasto destro sul punto Q, seleziona *Registra su foglio di calcolo*, in modo da raccogliere le coordinate del punto Q nelle colonne C e D.
- Muovi v_i sullo *slider* (o attivane l'animazione con il tasto destro) in modo da raccogliere tutti i dati che ti servono.

Ora che hai raccolto i dati, attiva il foglio di calcolo; nella colonna E costruisci le differenze fra due valori successivi di *x* (P) (velocità). Sai già, prima ancora di riempire la colonna delle differenze, che otterrai sempre……..
Nella colonna successiva ricava le differenze fra due successivi spazi di frenata (y (Q) - y (P)).
Riporta i valori ottenuti nella tabella A e fai le tue considerazioni in proposito.

Salva il file che hai costruito.



Videata Attività 2

Scheda per lo studente Attività 3

Osserva come cambia il grafico di $y = a\,x^2$ al variare di a in $\boldsymbol{R}$.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi.

Crea uno *slider* per la variabile a, assegna -10, 10 come intervallo di variazione e come incremento 0.5.

Nella barra di inserimento digita la formula $y = ax^2$.

Muovi lo *slider a* e dopo aver osservato i grafici completa:

- Se $a > 0$ la parabola si apre………… (verso il basso/verso l'alto)
- Se $a < 0$ la parabola si apre ………… (verso il basso/verso l'alto)
- Se $a = 0$ la parabola degenera in ………………
- Al crescere di $|a|$ la sua ampiezza ………………
- Al decrescere di $|a|$ la sua ampiezza ……………..

Riassumi le tue conclusioni completando le seguenti frasi

Nell'equazione $y = ax^2$ il **coefficiente di** x^2 determina……………………………………………

D'ora in avanti parleremo di **concavità** intendendo il verso di apertura.

L'**asse di simmetria** coincide con l'asse delle ……………..

Il **vertice V** della parabola, dato dall'intersezione tra la parabola e il suo asse di simmetria, coincide con ……………

- Quali sono le intersezioni della parabola con l'asse delle x?................
- Scrivi l'equazione che ha come radici le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse x. Quali e quante soluzioni ha questa equazione?.................

La parabola risulta …………… all'asse delle ascisse.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 4

Osserva come cambia il grafico di $y = ax^2 + bx$, con a costante, al variare di b in $\boldsymbol{R}$.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra, la Vista Grafica con gli assi e la Barra di inserimento.

Nella barra di inserimento assegna un valore ad a (ad esempio a =2 o un altro numero a scelta)

Crea uno *slider* per la variabile b; assegna -10, 10 come intervallo di variazione con incremento 0.5.

Nella barra di inserimento digita la formula $y = ax^2 + bx$.

Muovi lo *slider* b e dopo aver osservato i grafici completa:

- Se $b = 2$ le intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse sono………………. Il suo asse di simmetria è la retta ………..
- Se $b = 0$ la le intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse sono …………… il suo asse di simmetria è………………..
- Se $b = 4$ le intersezioni con l'asse delle ascisse sono ………………. Il suo asse di simmetria è la retta ………..
- Se $b = -6$ le intersezioni con l'asse delle ascisse sono ………………. Il suo asse di simmetria è la retta ………..

Riassumi le tue conclusioni completando la seguente frase: nell'equazione $y = ax^2 + bx$ il **coefficiente di** x determina ………………………………………………………………………….

- Che cosa puoi dire delle intersezioni della parabola con l'asse x al variare del segno di b?
- Scrivi l'equazione che ha come radici le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse x. Quali e quante soluzioni ha questa equazione?................

Disegna il grafico della retta $x = -\frac{b}{2a}$; con il comando *Intersezione di due oggetti* individua il punto di intersezione V fra parabola e retta.

- Che cosa puoi dire della retta $x = -\frac{b}{2a}$, in relazione alla parabola?
- Quale particolare punto della parabola è V? La sua ascissa è $-\frac{b}{2a}$; quale sarà la sua ordinata?

Puoi visualizzare le diverse posizioni assunte dalla parabola nel piano al variare di b selezionando la proprietà *Traccia attiva* riferita al grafico e muovendo quindi lo *slider b*.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 5

Osserva come cambia il grafico di $y = ax^2 + bx + c$, con a e b costanti, al variare di c in $\boldsymbol{R}$.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi e la Barra di inserimento.

Nella Barra di inserimento assegna un preciso valore sia ad a che a b (ad esempio a =2 e b =1.5, oppure altro a tua scelta)

Crea uno *slider* per la variabile *c*; assegna -10, 10 come intervallo di variazione con incremento 0.5.

Nella barra di inserimento digita l'equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Muovi lo *slider* *c* e dopo aver osservato i grafici completa:

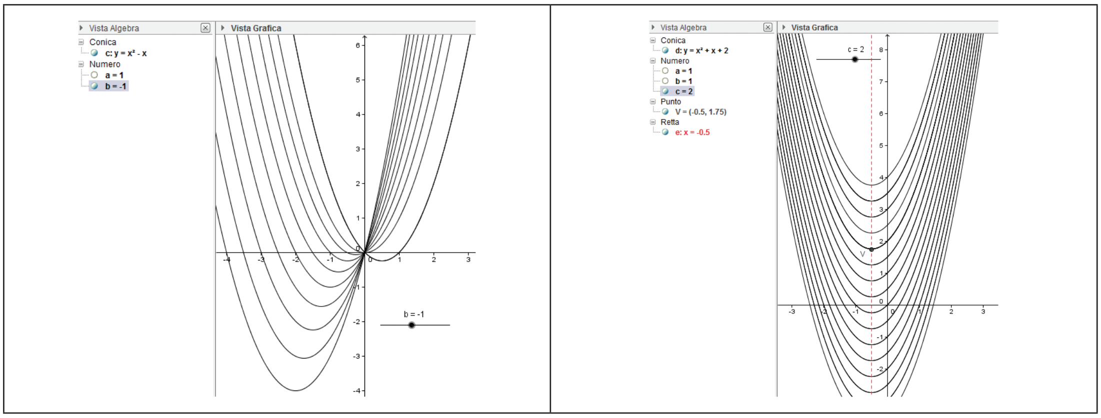
- Se $c = 0$ la parabola passa per ………………..
- Se $c \neq 0$ la parabola interseca l'asse delle ………… nel punto …………

Riassumi le tue conclusioni completando la seguente frase: il **coefficiente *c*** determina il punto in cui la parabola …………………

Usa il file di GeoGebra che hai creato per rispondere alle seguenti domande sul grafico di una funzione di secondo grado:

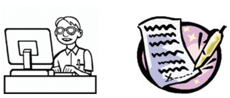
1. Qual è l'equazione dell'asse di simmetria della parabola?
2. Come puoi ricavare l'ascissa del vertice, nota l'equazione della parabola?
3. E la relativa ordinata?
4. Che relazione c'è fra le coordinate dei punti di intersezione della parabola con l'asse *x* e le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Conoscendo le coordinate del vertice di $y = ax^2 + bx + c$ ed il segno del primo coefficiente *a* si può affermare se l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha o meno radici reali?
6. Che relazione c'è fra le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e l'ascissa del vertice della parabola?
7. Qual è il punto in cui la parabola assume il valore minimo o il valore massimo?

Salva il file che hai costruito.



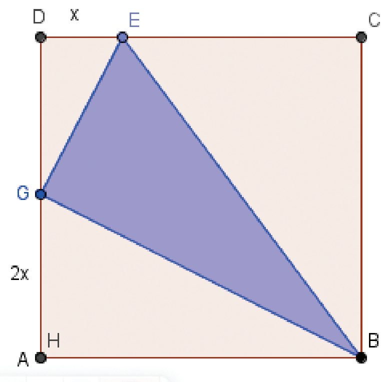
Videate Attività 4 e 5

Scheda per lo studente Attività 6



Problema – Il triangolo nel quadrato

Il quadrato ABCD (vedi disegno) ha il lato lungo 4 cm. Prendi due punti, E sul lato AB e G sul lato AD, in modo che AG=2DE. Costruisci quindi il triangolo EGB. Come varia l'area di tale triangolo al variare della lunghezza del segmento DE?



Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi

Costruisci un modello della situazione in GeoGebra.

Rappresenta graficamente la funzione Ar, area del triangolo EGB al variare della lunghezza di DE.

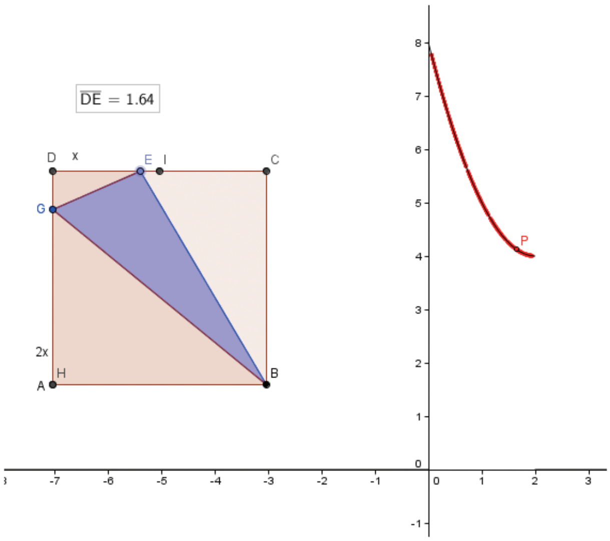
Fra quali valori può variare la lunghezza di DE per poter costruire il triangolo EGB alle condizioni del problema?

Rappresenta graficamente la funzione Ar, come traccia di un punto P che abbia come coordinate (distanza(DE), Ar).

Indica con x la misura di DE

- Trova per quale valore di x l'area di EGB misura 5 cm^2.
- Esiste un valore di x per cui l'area di EGB è nulla?
- Qual è l'espressione analitica della funzione Ar(x)?

Salva il file che hai costruito.



Videata attività 6

Scheda per lo studente Attività 7


Problema[8]

Trova per quali e quanti valori interi di b l'equazione $x^2 + bx - 16 = 0$ ha soluzioni reali (eventualmente coincidenti) ed intere.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi.

Esplora il problema ricorrendo al grafico della funzione di secondo grado $y = x^2 + bx - 16$.

Introduci uno *slider* per il parametro b, ricordando che b deve variare in $\boldsymbol{Z}$. Cerca di farti un'idea su come varia il grafico della parabola al variare di b; per far questo puoi iniziare l'esplorazione facendo variare b da -20 a 20, con incremento 1.

Riesci ad osservare una situazione di simmetria dell'insieme dei grafici al variare di b? Se si, per quali valori di b?

Approfondisci l'analisi sugli zeri della funzione.

Modifica i valori iniziale e finale del parametro b, facendolo variare da 0 a 50, sempre con passo 1. Allunga anche il segmento su cui varia b, in modo da percepire meglio la differenza fra un valore e l'altro.

Evidenzia i due zeri della funzione con il comando *Intersezione di due oggetti*, selezionando il grafico della parabola e l'asse x. Visualizza inoltre l'asse di simmetria della parabola ed il punto che si trova a metà dei due zeri (punto C). Visualizza il punto di intersezione fra la parabola e l'asse y (punto D).

Riporta le coordinate dei punti A, B, C e D in una zona visibile della Vista Grafica. Ricorda che per visualizzare le coordinate di un punto puoi usare il comando *Inserisci testo.* Ad esempio per visualizzare le coordinate di A in modo dinamico, cioè in modo tale che la scritta venga aggiornata al variare delle posizioni di A, puoi scrivere "A="+A.

Inserisci ora il punto P di coordinate (x(A), x(B)): ti servirà per facilitare la raccolta dei valori degli zeri della funzione.

Apri il Foglio di calcolo; nella prima colonna potrai raccogliere i valori di b e nelle due colonne successive i corrispondenti zeri della funzione.

Azzera il valore di b. Dalle *Proprietà* di b attiva quindi *Registra su foglio di calcolo*; fai la stessa cosa per il punto P (che ora puoi anche nascondere).

Apri le proprietà dello *slider* b e seleziona *Animazione crescente* (una sola volta); attiva quindi l'animazione di b e completa la raccolta degli zeri per b che va da 0 a 50.

Interrompi quindi la raccolta dei valori di b e di P sul foglio di calcolo, selezionando da *Proprietà, Registra su foglio di calcolo, Rimuovi.*

Ora puoi esaminare la tabella ottenuta ed individuare i valori di b per i quali gli zeri della funzione sono interi. Quali e quanti sono? Pensi che ce ne siano altri oltre a quelli che compaiono nella tabella?

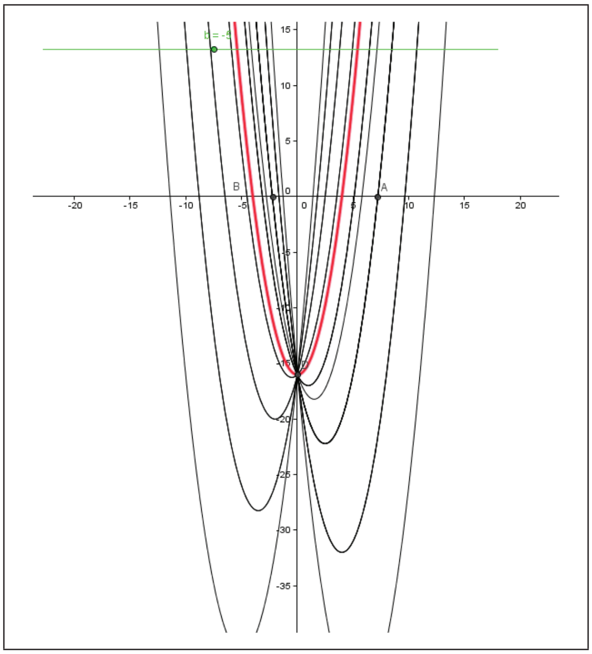
[8] Il quesito è tratto dai Giochi di Archimede del 2008.

Per ciascun caso di zeri interi individua la relazione fra zeri, equazione dell'asse di simmetria della parabola e coordinate dell'intersezione della parabola con l'asse y.

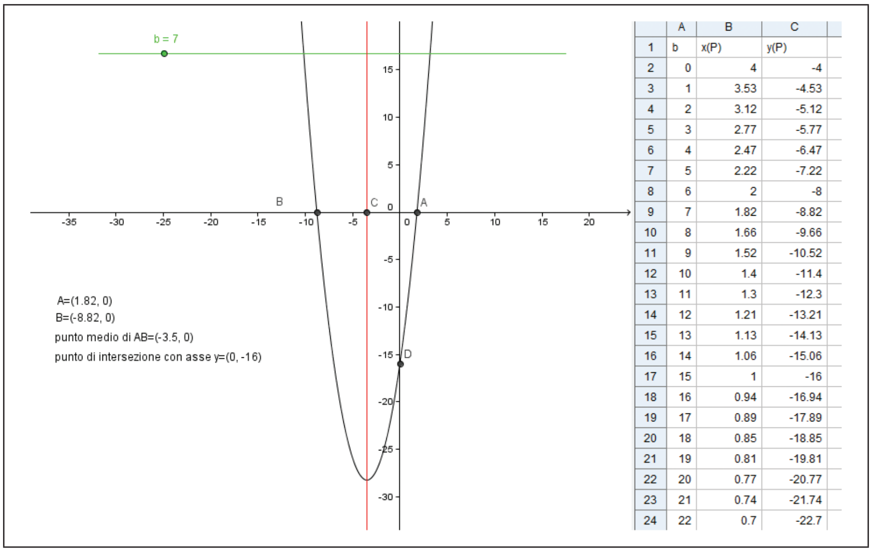
Per i particolari valori di b che hai individuato prova anche a rappresentare l'equazione in forma fattorizzata: $(x - \ldots)(x - \ldots)$.

Rispondi al quesito del problema giustificando le tue affermazioni.

Salva il file che hai costruito.



Videata Attività 7_1



	A	B	C
1	b	x(P)	y(P)
2	0	4	-4
3	1	3.53	-4.53
4	2	3.12	-5.12
5	3	2.77	-5.77
6	4	2.47	-6.47
7	5	2.22	-7.22
8	6	2	-8
9	7	1.82	-8.82
10	8	1.66	-9.66
11	9	1.52	-10.52
12	10	1.4	-11.4
13	11	1.3	-12.3
14	12	1.21	-13.21
15	13	1.13	-14.13
16	14	1.06	-15.06
17	15	1	-16
18	16	0.94	-16.94
19	17	0.89	-17.89
20	18	0.85	-18.85
21	19	0.81	-19.81
22	20	0.77	-20.77
23	21	0.74	-21.74
24	22	0.7	-22.7

Videata Attività 7_2

CAPITOLO 7

Variabili e parametri: il gioco degli slider

Introduzione

Che differenza c'è tra un parametro e una variabile? I due concetti sono strettamente legati tra loro e possono generare misconcetti e interpretazioni erronee negli allievi[1].

In algebra, ad esempio, si utilizzano spesso lettere per indicare numeri, ma, se si fa attenzione, la lettera utilizzata può rappresentare una variabile, una costante, un'incognita, oppure un parametro a seconda dei contesti. Si confronti, ad esempio la formula per calcolare l'area a di un rettangolo di base b e altezza h, $a = b \cdot h$, con la relazione che esprime la legge di proporzionalità diretta con fattore di proporzionalità k, $y = k \cdot x$: le due espressioni hanno una stessa struttura, ma mentre nella prima le tre lettere a, b e h assumono il ruolo di variabile (una volta stabilito il loro dominio) nella seconda solo x e y sono variabili e k è una costante. Tra le due formule cambiano certamente le lettere, ma è soprattutto il contesto ad assegnare a queste ultime ruoli diversi.

Lo studio di sistemi di curve dipendenti da parametro può porre problemi dal punto di vista della comprensione del significato e del ruolo del parametro: a ogni valore del parametro corrisponde una diversa curva, ma è bene indagare su *che cosa* dipende, o non dipende, dal parametro stesso.

Diviene importante per il docente presentare agli studenti situazioni in cui sia possibile visualizzare i differenti ruoli tra le lettere partendo dai diversi contesti in cui esse sono utilizzate. In questo capitolo sono raccolte alcune proposte di lavoro destinate a questo scopo.

Riferimenti alle indicazioni ministeriali

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

- L'alunno confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico ad una classe di problemi.
- Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni,...) e ne coglie il rapporto con il linguaggio naturale.

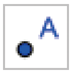
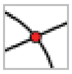
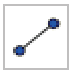
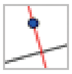
Riferimenti alle Indicazioni ministeriali e alle Linee guida per il biennio della scuola secondaria

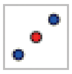
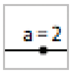
- Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le più semplici operazioni tra di essi.
- Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica. (*Indicazioni nazionali per i Licei*)
- Lo studente apprenderà a padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile. (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*)

[1] Per approfondimenti si rimanda all'articolo "Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe" di I. Chiarugi, G. Fracassina, F. Furinghetti e D. Paola: http://www.matematica.it/paola/Parametri,%20variabili%20e%20altro%20IMSI.pdf e a V. Villani, "Cominciamo da zero", Pitagora Editrice Bologna.

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Punto	
Intersezione di due oggetti	
Segmento – tra due punti	
Retta perpendicolare	

Strumenti	*Icone*
Punto medio	
Slider	
Inserisci testo	

OSSERVAZIONE 1: in GeoGebra[2] uno *slider* è definito come la rappresentazione grafica di un numero o un angolo libero. Per creare uno *slider*, dopo aver selezionato lo strumento, si deve fare clic in una zona libera della Vista Grafica, la finestra visualizzata consente di specificare 'Nome', 'Intervallo' [min, max] e 'Incremento' del numero o dell'angolo, come pure 'Allineamento' e 'Larghezza' dello *slider* (in pixel).

La posizione di uno *slider* nella Vista Grafica può essere assoluta (cioè lo zoom non ha effetto sullo *slider*, che rimarrà sempre nella zona visibile della Vista Grafica) oppure relativa al sistema di coordinate. Nella finestra di dialogo dello *slider* è inoltre possibile immettere il simbolo ° dei gradi o il simbolo π dei radianti per definire l'intervallo e l'incremento, utilizzando i seguenti tasti di scelta rapida:

- ALT – O per il simbolo dei gradi °
- ALT – P per il simbolo π

Proprietà degli oggetti GeoGebra

Nascondi etichetta	Tasto destro mouse sull'oggetto Mostra etichetta Deselezionare l'opzione
Rinomina	Rinomina All'apertura della casella di testo cancellare il vecchio nome e indicare il nome nuovo
Colora	Tasto destro mouse sull'oggetto Proprietà Colore

[2] Da "*GeoGebra – Guida. Manuale Ufficiale 3.2*"

Traccia	Tasto destro mouse sull'oggetto Proprietà Spuntare Traccia attiva

OSSERVAZIONE 2: un oggetto della Vista Grafica può avere una etichetta o non averla. L'opzione viene attivata con il tasto destro del mouse sull'oggetto, selezionando o deselezionando *Mostra etichetta*. Un modo però più articolato per gestire l'etichettatura si ha sempre attraverso tasto destro del mouse sull'oggetto, selezionando *Proprietà/Fondamentali/Mostra etichetta*. Il menu a discesa consente di far visualizzare: Nome, Nome e Valore, Valore, Legenda.

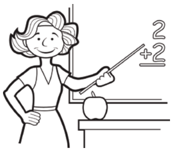
Ad esempio se M (2,-3) è il punto medio di un segmento, possiamo far comparire:

- *Nome*: M
- *Nome e Valore*: M(2,-3)
- *Valore*: (2,-3)
- *Legenda*: punto medio (dopo aver inserito "punto medio" nella casella relativa alla *Legenda*, inizialmente vuota).

1. Variabili e parametri[3]

Abbiamo già visto come nella relazione $y = k \cdot x$ il contesto riesca a far assumere il ruolo di variabile alle lettere x e y e il ruolo di costante, o di parametro, alla lettera k. In questa attività si chiede agli allievi di studiare il grafico della retta $y = k \cdot x$ individuando analogie, differenze e reciproche dipendenze/indipendenze dei tre oggetti matematici contenuti nella formula. Alla fine dell'attività k avrà assunto il ruolo sia di costante sia di parametro, cioè di una variabile che "parametrizza" la famiglia di rette grazie alla manipolazione mediante uno *slider*: l'allievo riuscirà a vedere un effetto immediato della variazione dei valori assunti da k.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: aritmetica e algebra.
- **Obiettivi**: Confrontare una variabile e un parametro, individuando analogie e differenze.
- **Ordine di scuola**:
  - Primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**: l'attività prevede una breve fase di costruzione del foglio di lavoro e una successiva fase di analisi e indagine meta cognitiva sugli oggetti costruiti e le relazioni individuate tra loro.

[3] Schede tratte dalle lezioni di A. Sargenti.

- **Indicazioni metodologiche**: l'insegnante, prima di iniziare il lavoro proposto dalle schede, potrebbe far notare le differenze che si hanno in GeoGebra tra l'inserimento diretto $x = 1$, $a = 1$ e l'assegnazione a b del valore 1 mediante uno *slider*, in modo che lo studente inizi a prendere dimestichezza con i diversi ruoli delle lettere.

  Le schede prevedono, come detto, specifiche indicazioni tecniche su come costruire l'ambiente di lavoro e una fase esplorativa in cui si chiede agli studenti di ragionare su quanto appena costruito. In entrambe le schede si presentano espressioni con la stessa struttura algebrica, ma con differente ruolo di variabile e parametro assunto dalle lettere stesse.

  Riteniamo importante far lavorare gli studenti a coppie e chiedere loro di scrivere le loro riflessioni, in modo da obbligarli a pensare alle parole e a cosa scrivono.

  Al termine dell'attività al computer, il docente raccoglie le riflessione dei suoi studenti e insieme a loro inizia una discussione matematica in cui sono gli studenti stessi che stabiliscono quali sono le riflessioni corrette e quali no. Lo scopo di tale discussione è di far emergere la consapevolezza delle differenze tra parametro e variabile, ma anche di indagare quali siano i misconcetti legati a tali argomenti in modo che sia più facile per l'insegnante decidere dove operare.

  Se il docente lo ritiene opportuno, per l'attività 1, può anche osservare con gli studenti che il punto A non può essere rinominato con *x,* mettendo in evidenza la differenza tra *etichetta* e *variabile* in GeoGebra.

- **Tempi**:

  o 2 ore, compresa la discussione.

  Schede per lo studente Attività 1 e 2.

  Esempi di videate relative alle attività.

Scheda per lo studente Attività 1


Apri in un nuovo file la Vista Grafica con assi cartesiani e barra di inserimento.

Inserisci uno *slider* e con l'opzione *Proprietà* chiamalo *k;* poni che vari da -15 a 15, con incremento 0.1.

Segna ora un punto A sull'asse delle ascisse, modifica quindi l'etichetta con *Proprietà*, selezionando *Mostra Legenda*, avendo indicato per il punto A nella casella *Legenda* il nome *x*.

Traccia la retta *b* perpendicolare all'asse orizzontale e passante per A.

Immetti la funzione $y = k \cdot x$, chiama *c* la retta così rappresentata e colorala di verde.

Segna con B il punto di intersezione tra le rette *c* e *b* e coloralo di rosso.

Nascondi la retta *b*.

Muovi *x*. Cosa osservi nel piano cartesiano? Perché?

Muovi B. Cosa osservi nel piano cartesiano? Perché?

Muovi *k*. Cosa osservi nel piano cartesiano? Perché?

Se ti aiuta rendi attiva la traccia del punto B e della retta *c*.

Con il puntatore ora muovi prima il punto *x* e poi il numero *k* sullo *slider*.

Nell'equazione $y = k \cdot x$, secondo te qual è il ruolo differente tra k e x? Perché?

Quale valore devi assegnare a k affinché la retta c passi per il punto (2; 5)? Spiega come hai fatto a trovare la risposta.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 2


Apri in un nuovo file la Vista Grafica con assi cartesiani e barra di inserimento.

Inserisci uno *slider* e con l'opzione *Proprietà* chiamalo *a;* poni che vari da -15 a 15, con incremento 0.1.

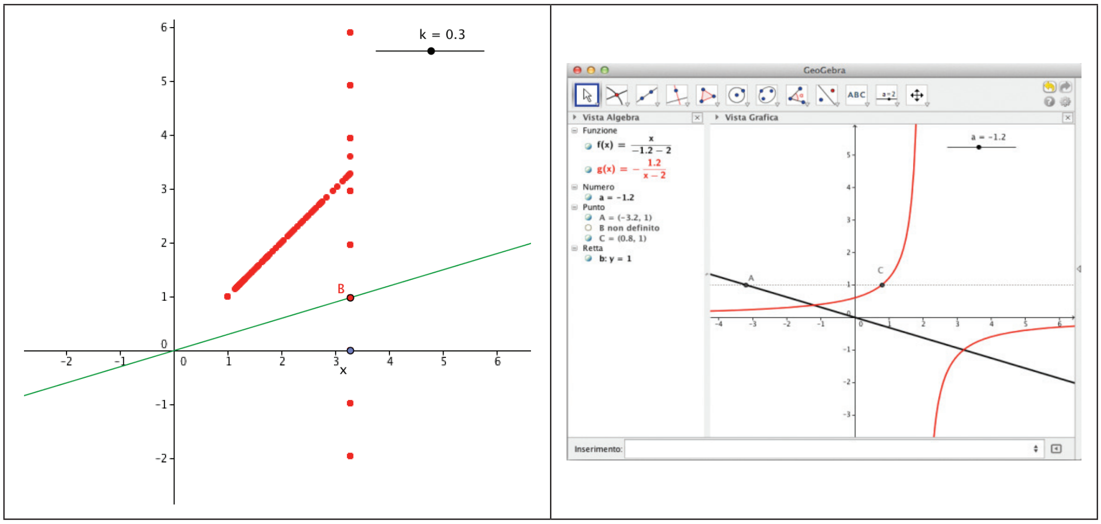
Rappresenta le funzioni $f(x) = \dfrac{x}{a-2}$ e $g(x) = \dfrac{a}{x-2}$.

Esse hanno la stessa struttura, ma non sono uguali.

Osserva il grafico e prova a rispondere alla domande:

- Esistono dei valori di x in cui la funzione f o la g non esistono?
- Esistono dei valori di a in cui la funzione f o la g non esistono?
- Se si modifica il valore ad a mediante lo *slider* cosa succede?
- Quali e quante sono le soluzioni di $\dfrac{x}{a-2} = 1$ $\dfrac{a}{x-2} = 1$? Modifica il valore di a per rispondere.
- x e a sono interscambiabili?

Salva il file che hai costruito.

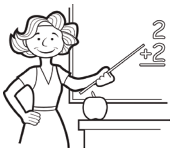


Videata Attività 1 e 2

2. Quadrati e quadrati

Una variabile in matematica è definita quando se ne conosce il dominio di variabilità. Se consideriamo un punto del piano come oggetto variabile, allora il suo dominio può essere l'intero piano, o una retta, o un poligono, a seconda del sottoinsieme da appartenenza. Con GeoGebra questa relazione di appartenenza diventa tangibile: il punto non è più libero di muoversi in ogni direzione, ma è vincolato a un preciso oggetto definito in precedenza. *Punto su* è il comando grafico più immediato per definire l'appartenenza di un punto ad un sottoinsieme del piano: possiamo così decidere se far variare un punto su una retta, una circonferenza, ecc. Il vincolo diviene fisico e può aiutare a far comprendere agli allievi i significati di appartenenza, dominio, insieme di variabilità.

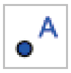
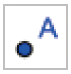
Scheda per il docente



- **Nucleo**: spazio e figure, ma anche relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - o Riconoscere il vincolo che lega un punto ad un oggetto.
  - o Comprendere il significato di *appartenenza, dominio, insieme di variabilità.*
- **Ordine di scuola**:
  - o Scuola secondaria di I grado.
  - o Primo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**: gli studenti devono lavorare su un file di GeoGebra precedentemente preparato dal docente (nella scheda per gli studenti tale file viene denominato convenzionalmente *Disegno_Costruzione_Quadrati*). Nel file sono presentati 6 quadrilateri: apparentemente sono tutti quadrati. Ma sono davvero dei quadrati? Quali sono i vincoli dei vertici? Qual è il loro insieme di variabilità?
- **Indicazioni per l'insegnante**:

  Indichiamo di seguito le caratteristiche di ciascun quadrilatero ed il relativo protocollo di costruzione.[4]

  Quadrato A: le relazioni fra i lati sono quelle di un generico quadrilatero; tutti i vertici sono liberi di muoversi in modo indipendente.

Punto U		
Punto M		

[4] Il file può essere scaricato all'indirizzo http://www.geogebra.org/book/intro-it.zip, all'interno della cartella WS_HO_1, con il nome *Disegno_Costruzione_Quadrati*. La scheda dell'attività 1 è ispirata a quella presente nel paragrafo 4, *Disegni, costruzioni e test di trascinamento*, del file ggb-intro-it42-2012-11-18.pdf.

Semiretta d1		Semiretta per M e U
Punto V		Punto su d1
Punto A		
Punto B		
Punto C		
Punto D		
Quadrilatero QuadratoA		poligono A, B, C, D

Quadrato B: è stato costruito correttamente un quadrato con il lato di misura e direzione prefissata. L'unico punto libero di muoversi nel piano è il vertice in basso a sinistra.

Punto E		
Punto F		E + (3, 0)
Segmento e		Segmento [E, F]
Retta f		Retta per F perpendicolare a e
Circonferenza g		Circonferenza per E di centro F
Punto G		Punto di intersezione tra g e f
Retta h		Retta per G perpendicolare a f
Retta i		Retta per E perpendicolare a e

Punto H		Punto di intersezione tra h e i
Quadrilatero QuadratoB		Poligono E, F, G, H

Quadrato F: è un quadrato; si possono modificare le misure dei lati e le direzioni. Due soli vertici si muovono liberamente nel piano; gli altri sono vincolati.

Punto I		
Punto J		
Segmento J		Segmento [I, J]
Circonferenza k		Circonferenza per J di centro I
Circonferenza p		Circonferenza per I di centro J
Retta i		Retta per I perpendicolare a j
Retta m		Retta per J perpendicolare a j
Punto K		Punto di intersezione tra p e m
Punto L		Punto di intersezione tra k e l
Quadrilatero QuadratoF		Poligono I, J, K, L

Quadrato D: le relazioni fra lati sono quelle di un parallelogramma. Tre vertici sono completamente liberi di muoversi nel piano; il quarto vertice è vincolato ai primi tre.

Segmento n		Segmento [M, V]
Retta s		Retta per M perpendicolare a n

Punto Q		
Punto R		
Segmento t		Segmento [Q, R]
Punto S		
Segmento a1		Segmento [Q, S]
Retta b1		Retta per S perpendicolare a t
Retta c1		Retta per R perpendicolare a a1
Punto T		Punto di intersezione tra b1 e c1
Quadrilatero QuadratoD		Poligono Q, R, T, S

Quadrato C: le relazioni fra lati sono quelle di un rettangolo. Un solo vertice è libero di muoversi nel piano; altri due vertici si muovono ciascuno su una retta (perpendicolare al segmento adiacente). Il quarto vertice è vincolato.

Retta q		Retta per V perpendicolare a d1
Punto N		Punto su q
Retta r		Retta per N perpendicolare a q
Retta e1		Retta per M perpendicolare a n
Punto O		Punto di intersezione tra r e e1
Quadrilatero QuadratoC		Poligono M, V, N, O

Quadrato E: le relazioni fra lati sono quelle di un trapezio. Tre vertici si muovono liberamente nel piano; il quarto vertice si muove su una retta parallela al lato non adiacente.

Punto P		
Punto W		
Segmento f1		Segmento [P, W]
Punto A1		
Retta h1		Retta per A1 perpendicolare a f1
Punto B1		Punto su h1
Quadrilatero QuadratoE		Poligono P, W, B1, A1

- **Indicazioni metodologiche**: è di fondamentale importanza la discussione successiva in cui il docente mostra agli allievi l'importanza del dominio, dell'insieme di appartenenza del singolo vertice, come viene evidenziato nei commenti al protocollo di costruzione. Dalla discussione deve emergere, per ciascun quadrato, quali vertici possono muoversi liberamente nel piano, quali sono vincolati a rette, ecc. Ovviamente tale discussione avviene dopo una fase esplorativa da parte degli allievi che può essere svolta singolarmente o a coppie, ma è importante che le coppie siano composte da studenti di pari livello.
- **Tempi**:
  - o 2/3 ore, compresa la discussione.


Scheda per lo studente Attività 1.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri il file *Disegno_Costruzione_Quadrati* che ti è stato consegnato dal docente.

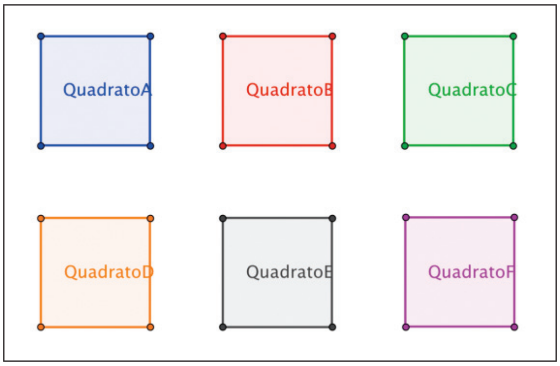
Puoi vedere sei quadrilateri. Sono tutti dei quadrati o appaiono soltanto come tali?

Trascina i vertici di ciascun quadrato con il mouse e annota le tue osservazioni.

Prova a fare una congettura su come ciascun quadrato è stato costruito.

Individua quali vertici sono liberi di muoversi nel piano, quali possono variare soltanto su sottoinsiemi del piano, quali invece sono totalmente vincolati ad elementi precedentemente costruiti.

Scrivi cosa hai osservato.

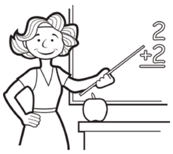


Videata file Disegno_Costruzione_Quadrati

3. I fasci di circonferenze[5]

L'attività prevede lo studio dei fasci di circonferenze, generati come combinazione lineare di due circonferenze; in particolare si pone l'attenzione sui cambiamenti della curva associata all'equazione ottenuta variando i valori del parametro: questo dovrebbe consentire allo studente di vedere direttamene come a ogni singolo valore del parametro corrisponda una diversa circonferenza.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: spazio e figure.
- **Obiettivi**:
  - Imparare a generare un fascio di circonferenze.
  - Scoprire le caratteristiche di un fascio di circonferenze al variare dei parametri.
  - Riconoscere uno dei ruoli dei parametri, in particolare osservare che ad ogni valore del parametro corrisponde una circonferenza.
- **Ordine di scuola**:
  - Primo biennio scuola secondaria II grado.
  - Secondo biennio scuola secondaria II grado.

[5] Schede tratte dalla sperimentazione di A. Baderna e P. Polito.

- **Descrizione attività**: prerequisito all'attività è la conoscenza, da parte degli studenti, del concetto di combinazione lineare di due equazioni. L'argomento potrebbe anche essere richiamato alla memoria degli studenti dalla soluzione di sistemi lineari con il cosiddetto metodo di 'somma e sottrazione', basato proprio sulla combinazione lineare di due equazioni.

  L'attività prevede una breve fase di costruzione del foglio di lavoro e una successiva fase di analisi e indagine meta cognitiva sugli oggetti costruiti e le relazioni individuate tra loro.

  Il lavoro è specifico per i fasci di circonferenze, ma attività simili possono essere impostate per studiare i fasci delle altre coniche.

- **Indicazioni metodologiche**: la scheda prevede, come detto, specifiche indicazioni tecniche su come costruire il foglio di lavoro e una fase esplorativa in cui si chiede agli studenti di ragionare su quanto appena costruito.

  È importante far lavorare gli studenti a coppie e chiedere loro di scrivere le loro riflessioni, in modo da obbligarli a pensare alle parole e a cosa scrivono.

  Nell'ultima attività il lavoro può essere svolto individualmente. Importante è poi la fase conclusiva, gestita dal docente, in cui si mettono in comune le riflessioni e le scoperte degli allievi istituzionalizzando il sapere appreso.

- **Tempi**:
  - o 2 ore, compresa la discussione.

  
  Schede per lo studente Attività 1 e 2.

  Esempi di videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Costruiamo un fascio di circonferenze.

Apri in un nuovo file la Vista Grafica con gli assi cartesiani e con la barra di inserimento.

Digita nelle barra *Inserimento* $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$ e $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$ e colora rispettivamente di rosso e blu le due circoferenze c e d così rappresentate.

Queste saranno le generatrici del fascio.

Inserisci due *slider* che chiamerai p e q; a ognuno imponi un intervallo di variazione da -50 a +50, con incremeto di +0,1.

Scrivi nella barra di inserimento la combinazione lineare delle due circonferenze:

$$p \cdot (x^2 + y^2 + 2y - 9) + q \cdot (x^2 + y^2 - 8x - 2y + 9) = 0.$$

Con il comando *Punto medio o Centro* fai apparire i centri delle circonferenze e chiama A il centro di c, B il centro di d e C il centro della circonferenza generata dalla combinazione lineare.

Studiamo le caratteristiche del fascio di circonferenze.

Chiama D ed E i punti di intersezione delle due circonferenze generatrici e disegna il segmento CD raggio della circonferenza generata.

Inserisci un testo scrivendo esattamente “CD=”+a .

Fai variare i parametri p e q e annota le tue osservazioni.

Cosa cambia al variare di p e di q?

Cosa non cambia al variare di p e di q?

Cosa succede quando $p = 0$? Perché?

Cosa succede quando $q = 0$? Perché?

Cosa succede quando $p = -q$? Perché?

Nella Vista Algebra puoi leggere l’equazione della circonferenza derivante dalla combinazione lineare, che nell’ultimo caso analizzato risulta degenere (clicca sull’equazione col tasto destro e scegli la scrittura in forma esplicita). Qual è la misura del raggio CD?

Clicca sul centro C e spunta la traccia attiva. Muovi gli *slider* e fai le tue congetture per quanto riguarda il luogo geometrico determinato dai centri C e la relazione che intercorre tra questo e la retta passante per D ed E, motivando analiticamente le tue affermazioni.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 2

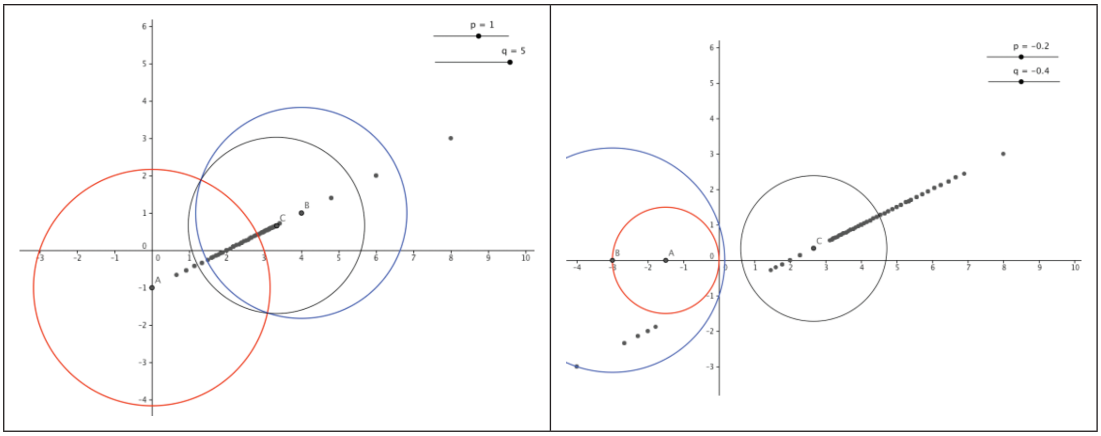

Apri in un nuovo file la Vista Grafica con gli assi cartesiani e con la barra di inserimento.

Seguendo le indicazioni precedenti prova a studiare la natura e le caratteristiche del fascio di circonferenze generato da

$$x^2 + y^2 + 3x = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0.$$

Annota le tue osservazioni.

Salva il file che hai costruito.



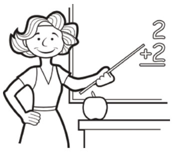
Videate Attività 1 e 2

4. Vertici di parabole[6]

Nel capitolo precedente è stata presentata la funzione quadratica; in questo paragrafo si riprende il discorso affrontando il problema di determinare il luogo dei punti generato dai vertici di una parabola al variare dei coefficienti che compongono il polinomio di secondo grado. Lo studente analizzerà il luogo geometrico al variare dei tre parametri, modificandoli uno alla volta. Imparerà a fare previsioni, ma soprattutto a capire il legame tra un parametro e le coordinate di un singolo punto.

Non manca una fase di calcolo con carta e matita, successiva alla fase esplorativa con GeoGebra.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: spazio e figure.
- **Obiettivi**:
  - o Riconoscere il ruolo dei parametri in un trinomio di secondo grado.
  - o Approfondire la conoscenza della funzione quadratica.
  - o Individuare il luogo dei punti del vertice di una parabola al variare dei parametri della funzione quadratica che la rappresenta algebricamente.
- **Ordine di scuola**:
  - o Primo o secondo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**: lo scopo è studiare il luogo dei punti descritti dal vertice di una parabola al variare dei coefficienti del polinomio associato. Le schede dividono l'attività in fasi, una per ogni parametro; sono composte da brevi istruzioni che indicano agli allievi come costruirsi lo spazio di lavoro e da alcune domande che li aiutano a pensare e a congetturare.

  Al termine delle fasi esplorative, con l'aiuto del software, agli studenti si chiede di definire l'equazione del luogo di punti descritto dal vertice, confrontandolo con quanto trovato con GeoGebra.

  Ovviamente l'attività non è adatta per introdurre la funzione quadratica, ma deve necessariamente essere successiva.
- **Indicazioni metodologiche**: l'attività è pensata per studenti che già conoscono le definizioni di parabola come luogo di punti, di vertice, assi di simmetria e che sappiano riconoscere le relazioni che esistono tra un polinomio di secondo grado e il grafico associato. Come già detto lo scopo è studiare il luogo descritto dal vertice della parabola.

[6] Schede tratte dalle sperimentazioni di M.R. Bisconti, F. Giustino e dalle lezioni di A. Sargenti

I ragazzi possono lavorare sia a coppie, sia singolarmente. È importante che il docente al termine di ogni attività, o alla fine di tutte le schede, preveda un momento di discussione in cui i ragazzi condividano quanto scoperto e formalizzino le conoscenze. In particolare è importante che il docente guidi gli studenti a capire che l'equazione del luogo dei vertici della parabola $y = ax^2 + bx + c$ ricavata con carta e matita

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}, \quad a, b, c \in \boldsymbol{R},\ a \neq 0$$

rappresenta ora un punto, ora una retta, ora una parabola a seconda di qual è il parametro considerato.

Eventualmente, nel secondo biennio, si può giungere all'equazione cartesiana del luogo geometrico.

- **Tempi**:
  - 3 ore, compresa la discussione.

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4 e 5.

Esempi di videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1


Apri in un nuovo file la Vista Grafica con gli assi cartesiani e con la barra di inserimento.

Crea tre *slider* e chiamali *a*, *b* e *c*: imposta l'intervallo di variazione da -20 a 20, con incremento 0,1.

Poni $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$.

Nella barra inserimento digita g(x) = a*x^2 + b*x + c e osserva la parabola corrispondente. Quali sono le coordinate del suo vertice?

Definisci il punto $V = \left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, che è il vertice della parabola.

Modifica il valore del parametro *a* con l'aiuto dello *slider*, lasciando invariati i valori di *b* e *c*, e osserva la parabola.

Fai attenzione che *a* assuma valori sia positivi sia negativi. Secondo te qual è il luogo dei punti descritto dal vertice V al variare del parametro *a*?

Con il tasto destro del mouse attiva il comando *Traccia* al punto V e varia *a*: qual è il luogo dei punti descritto dal vertice V? Concide con le tue previsioni?

Disattiva l'opzione *Traccia* sul punto V.

Salva il file con il nome parametro_a.ggb.

Scheda per lo studente Attività 2

Apri in GeoGebra il file *parametro_a.ggb.*

Poni $a = 1$, lascia $b = 0$ e varia il valore del parametro c.

Aiutandoti con lo *slider* fai variare i valori di c e osserva la parabola. Secondo te qual è il luogo dei punti descritto dal vertice V al variare del parametro c?

Con il tasto destro del mouse attiva nuovamente l'opzione *Traccia* del punto V e modica il valore di c: qual è il luogo dei punti descritto dal vertice V? Concide con le tue previsioni?

Disattiva l'opzione *Traccia* sul punto V.

Salva il file con il nome *parametro_c.ggb.*

Scheda per lo studente Attività 3

Apri in GeoGebra il file *parametro_a.ggb.*

Lascia $c = 0$, $a = 1$ e modifica il valore del parametro b sempre con l'aiuto dello *slider*. Osserva il grafico della parabola al variariare di b facendo attenzione che a b vengano assegnati valori positivi e negativi. Secondo te qual è il luogo dei punti descritto dal vertice V al variare del parametro b?

Con il tasto destro del mouse attiva nuovamente l'opzione *Traccia* del punto V e modica il valore di b: qual è il luogo dei punti descritto dal vertice V? Concide con le tue previsioni?

Disattiva l'opzione *Traccia* sul punto V.

Salva il file con il nome *parametro_b.ggb.*

Scheda per lo studente Attività 4

Apri in GeoGebra il file *parametro_a.ggb.*

Tramite gli *slider* stabilisci dei valori a piacere per i parametri b e c, diversi da zero e fai variare il parametro a.

Qual è il luogo dei punti descritto dal vertice?

Attiva nuovamente la traccia per V. Cosa osservi? È in accordo con le tue previsioni?

Sai individuare l'equazione del luogo rappresentato?

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 5

Considera una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$. Ricorda che le coordinate del suo vertice sono:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}, \quad a, b, c \in \boldsymbol{R}, \; a \neq 0$$

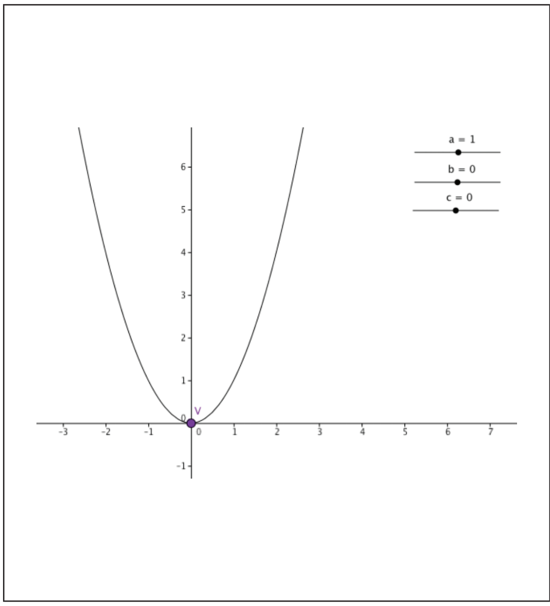
Se $b = c = 0$, cosa si può dire del vertice al variare di a?

Qual è l'equazione del luogo dei punti descritto dal vertice al variare di c, mantenendo $b = 0$ e $a = 1$?

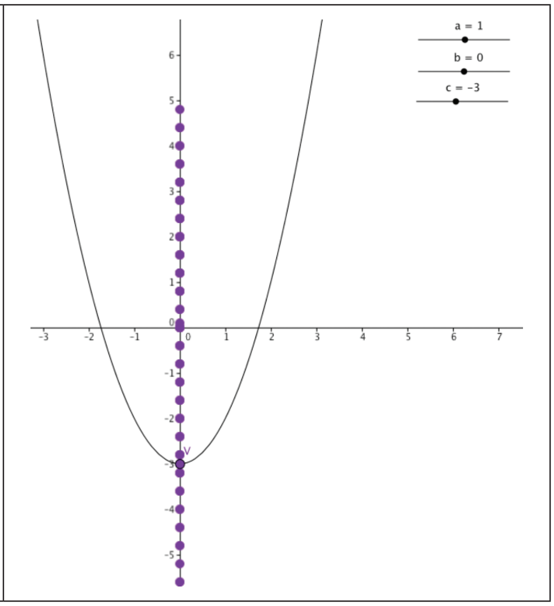
Qual è l'equazione del luogo dei punti descritto dal vertice al variare di b, mantenendo $a = 1$ e $c = 0$? Per rispondere sostituisci i valori noti nelle coordinate di V e quindi elimina b dal sistema.

Qual è l'equazione del luogo dei punti descritto dal vertice al variare di a, mantenendo b e c costanti, diversi da zero? Per rispondere elimina a dal sistema.

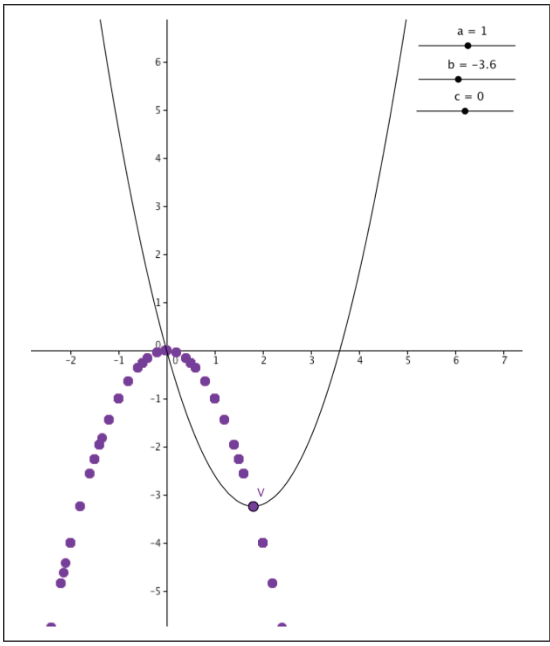
Riprendi le risposte date nelle schede precedenti e verifica se le risposte sono in accordo o meno.



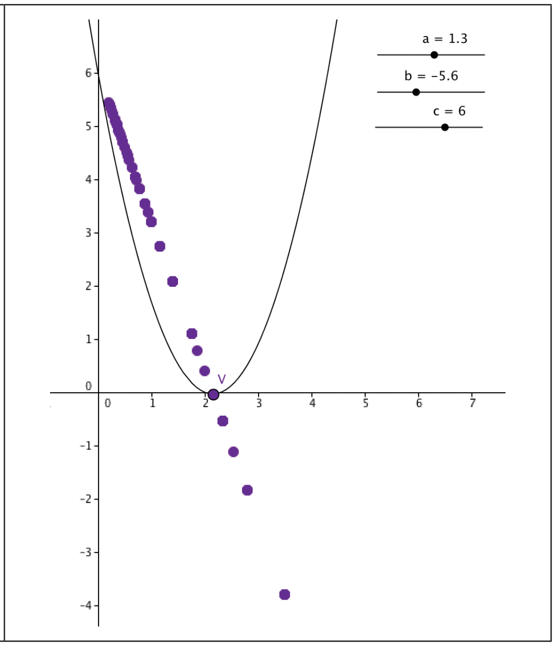
Videata Attività 1



Videata Attività 2



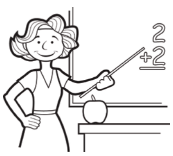
Videata Attività 3



Videata Attività 4

5. Disequazioni di secondo grado[7]

Scheda per il docente



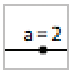
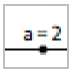
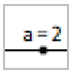
- **Nucleo**: relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - o Risolvere disequazioni di secondo grado.
- **Ordine di scuola**:
  - o Primo biennio scuola secondaria II grado.
  - o Secondo biennio scuola secondaria II grado
- **Descrizione attività**: è un'alternativa alle spiegazioni statiche che si trovano sui libri di testo per la risoluzione di disequazioni di secondo grado. L'attività non è adatta per introdurre la disequazioni, ma serve per meglio comprendere la tecnica risolutiva di queste disequazioni.
- **Indicazioni metodologiche**: il file da utilizzare è preimpostato dal docente, secondo il protocollo di costruzione qui riportato. Nelle schede per gli studenti tale file è denominato *segno trinomio.ggb.*

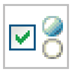
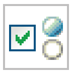
[7] Scheda tratta da F. Beltramo e P. Revelli.

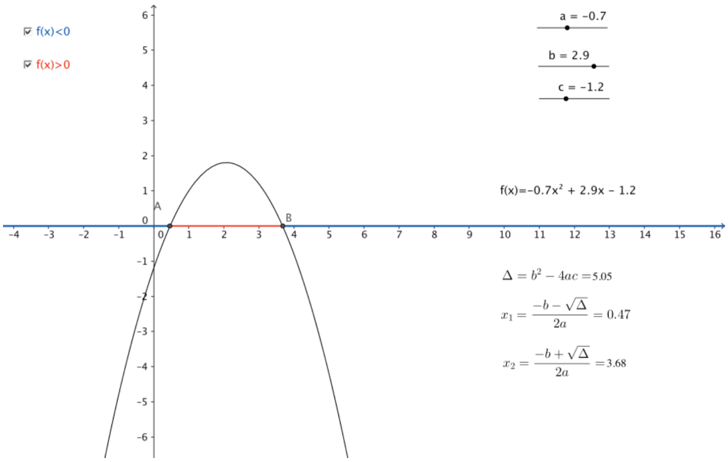
Terminata la fase esplorativa degli allievi, il docente può formalizzare il sapere con un momento di lezione frontale seguito da una breve discussione matematica.

- **Indicazioni per l'insegnante**:

Protocollo di costruzione:

N.	Nome	Icona	Definizione
1	Numero a		
2	Numero b		
3	Numero c		
4	Funzione f		f(x) = $ax^2 + bx + c$
5	Punto B		Radice[f]
6	Numero x_1		x(A)
7	Numero x_2		x(B)
8	Funzione fneg		Se[f(x) < 0, f]
9	Funzione fpos		Se[f(x) > 0, f]

N.	Nome	Icona	Definizione	Legenda
10	Funzione h		Se[f(x) < 0, 0]	
11	Valore booleano e			f(x)<0
12	Funzione g		Se[f(x) > 0, 0]	
13	Valore booleano i			f(x)>0
14	Numero delta		$b^2 - 4ac$	
15	Testo testo1		"f(x)=" + f	
16	Testo testo2		"$\Delta = {b^2-4ac}=$" + delta	
17	Testo testo3		"$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=$"+(LaTex[x_1])+""	
18	Testo testo4		"$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=$"+(LaTex[x_2])+""	



Videata scheda

- **Tempi**:
  - o 2 ore, compresa la discussione.

Scheda per lo studente Attività1

Apri il file *segnotrinomio.ggb* che ti è stato consegnato dal docente.

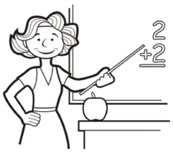
Nel file compaiono il valore di Δ e delle radici x_1 e x_2.

Aiutandoti con gli *slider* completa la seguente tabella: in ogni cella scrivi per quali valori di x è verificata la *disequazione di secondo grado* $ax^2 + bx + c > 0$

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
a > 0 Concavità della parabola rivolta verso …			
a < 0 Concavità della parabola rivolta verso …			

6. E nell'Esame di Stato?[8]

Scheda per il docente



- **Nucleo**: relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - o Approcci dinamici ai problemi proposti agli esami di stato.
- **Ordine di scuola**:
  - o Quarto o quinto anno scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività**: risolvere un problema proposto all'esame di stato richiede che lo studente abbia anche la capacità di vedere le variazioni e interpretare le relazioni che vengono di volta in volta descritte. Capita spesso di trovare funzioni descritte con l'ausilio di un parametro per le quali si chiede di individuare invarianti, quali i limiti dei parametri, ecc. Sebbene durante la prova lo studente non possa utilizzare strumenti informatici a proprio supporto, analizzare problemi secondo le indicazioni qui proposte può essere utile per agevolare la comprensione dei problemi stessi e abituare in generale a pensare in termini dinamici, anche quando non si può usare lo strumento informatico.

[8] Schede ispirate alla sperimentazione di F. Rolle

- **Indicazioni metodologiche**: gli allievi possono lavorare singolarmente, è però importante che dopo aver *visto* cosa succede con GeoGebra gli allievi trovino il raffronto, la verifica con carta e matita, che non deve mancare.
- **Tempi**:
  - 2 ore, compresa la discussione.


Scheda per lo studente Attività 1.

Scheda per lo studente

Problema 2 Esame di Stato 2010 Corso di Ordinamento.

Nel piano riferito a coordinate cartesiane Oxy si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ $(b > 0,\ b \neq 1)$.

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo a un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b. La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?

Utilizza GeoGebra per svolgere la costruzione.

Fissa uno *slider* b variabile tra 0 e 5 che funga da base per l'esponenziale.

1. Fai le osservazioni relative alla funzione esponenziale:
   - qual è il dominio?
   - qual è l'immagine?
   - per quali valori di b è crescente?
   - per quali è decrescente?
   - perché occorre che b sia diverso da 1?
   - la funzione assume valori negativi?
2. Fissa il punto P appartenente alla funzione esponenziale e poi procedi nella costruzione prevista dal problema. Dopo aver individuato i punti A e B è possibile far segnare sul foglio di lavoro la lunghezza del segmento AB, in modo da verificare se, per un valore b fissato, tale segmento mantiene costante la sua lunghezza?

Scrivi le tue osservazioni.

3. Prova ora a individuare il valore di b per il quale il segmento assume lunghezza pari a 1. Vi è un solo valore? Scrivi il/ i valore/i trovato/i.
4. Cosa puoi dedurre?

INDICE DEI TEMI MATEMATICI

Angoli
Bisettrice 41, 62
Congruenza 19, 21
Costruzione 13, 21
Circonferenza 129-131
Equazione/disequazione 117-118, 136-138, 115-116
Funzione lineare 95-98, 101-108
Funzione quadratica 108-115
Iperbole 91-92, 94-95
Luogo geometrico 80-84
Parametro 119, 121-123
Parabola
Asse di simmetria 113-115
Concavità/apertura 113-115
Equazione nel piano cartesiano 113-115
Vertice 132-136
Proporzionalità diretta 85, 87-91
Proporzionalità inversa 85, 91-95
Punto
Nel piano cartesiano/coordinate 71, 73-84
Nel piano euclideo 15
Quadrilateri
Concavi/convessi 70
Deltoide 66-67
Equivalenza 68-69
Parallelogrammo 67-68, 128-129
Rettangolo 70, 128-129
Rombo 67-68, 128-129
Quadrato 66, 67-68, 128-129
Rette
Intersezione di 17
Parallele, perpendicolari 16-18, 81, 84
Per due punti 16-17, 80-84
Segmenti
Asse di simmetria 24-26, 61-62
Costruzione 13, 19
Operazioni con 20

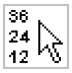
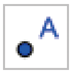
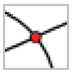
Trasformazioni geometriche
Omotetia 74, 77-78
Simmetria assiale 65, 67, 74-76
Simmetria centrale 74-76
Traslazione 74, 76-77
Triangoli
Acutangolo, ottusangolo, isoscele, rettangolo 31-34, 38
Altezza, mediana, bisettrice 36, 39, 57-63
Congruenza 43-54
Equivalenza 68-69
Punti notevoli: baricentro, circocentro, incentro, ortocentro 55, 57-63
Variabili 119, 121-123

INDICE DI GEOGEBRA

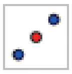
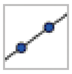
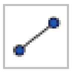
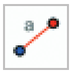
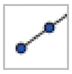
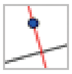
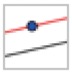
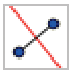
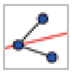
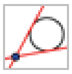
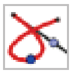
In questo indice sono riportati soltanto i rimandi a strumenti, comandi, indicazioni relative a proprietà degli oggetti e delle varie Viste, in genere commentati all'interno del testo. Quindi quanto segue non può essere considerato un manuale né tanto meno è esaustivo di tutto quanto può essere fatto con GeoGebra. Si rimanda per questo alla guida in linea, i cui indirizzi sono indicati in nota per ogni singola sezione.

Barra degli strumenti[1]

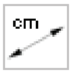
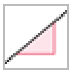
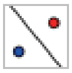
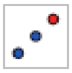
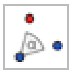
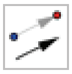
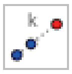
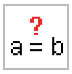
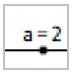
Gli strumenti sono ordinati in dodici caselle, che individuano temi. Ciascuna casella si apre in una finestra a cascata (freccia sull'angolo destro dell'icona): in essa sono presenti altre caselle, in numero variabile, che individuano operazioni relative al tema specifico. Vi possono poi essere in fondo caselle aggiuntive alle dodici predefinite: infatti l'utente può generare strumenti personalizzati, che possono, all'occorrenza, essere richiamati.

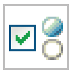
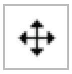
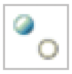
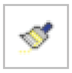
1. Strumenti Movimento	Muovi		L'icona deve essere attiva se si vogliono muovere o trascinare oggetti.
	Registra sul foglio di calcolo		Cap. 6 Strumenti richiamabili da menu – Osservazione 1.
2. Strumenti Punto	Nuovo punto		Un punto è anche definibile nella barra di inserimento (es. P=(-2,3) o in una cella del Foglio di calcolo (es. (-2,3); in questo caso il nome assunto automaticamente è quello della cella). Cap. 4 Comandi con inserimenti nella barra apposita – Osservazione 2.
	Punto su oggetto		Il punto così definito si muoverà su una linea o all'interno di un poligono.
	Intersezione di due oggetti		Se si clicca sui due oggetti si determinano tutte le intersezioni; se invece si clicca su una particolare intersezione viene visualizzata solo quella. Ad esempio nel caso di intersezione tra retta e circonferenza, se si selezionano i due oggetti verranno evidenziati in genere due punti. Se si vuole invece solo una particolare intersezione è necessario posizionarsi con il mouse proprio su quella.

[1] http://wiki.geogebra.org/it/Barra_degli_strumenti

	Punto medio o centro		Individua il punto medio di un segmento, attraverso i suoi estremi, o il centro di una conica.
3. Strumenti Retta	Retta - per due punti		È bene che i due punti base, se liberi, non vengano successivamente utilizzati per costruzioni perché loro spostamenti influiscono sulla retta.
	Segmento – tra due punti		Non è necessario definire prima i due punti. Oltre che attraverso lo strumento, il segmento può essere introdotto con un comando nella barra di inserimento: Segmento[A,B], dove A e B sono punti definiti in precedenza.
	Segmento - dati un punto e la lunghezza		La lunghezza può essere un numero, uno slider o la misura di un altro segmento.
	Semiretta - per due punti		È bene che il punto diverso dall'estremo, se libero, non venga successivamente utilizzato per costruzioni perché il suo spostamento influisce sulla semiretta.
4. Strumenti Retta speciali	Retta perpendicolare		Può essere anche determinata dal comando Perpendicolare (la sintassi appare in automatico).
	Retta parallela		Può essere anche determinata dal comando Parallela (la sintassi appare in automatico).
	Asse di un segmento		Usando lo strumento, non è necessario aver definito il segmento: sono sufficienti i due estremi. Può essere anche determinato dal comando Asse (la sintassi appare in automatico).
	Bisettrice		Può essere anche determinata dal comando Bisettrice (la sintassi appare in automatico). Cap. 4 Osservazione 1, bisettrici assi cartesiani.
	Tangenti		
	Luogo		Cap. 4 Osservazione 3, *Equazione Luogo*

5. Strumenti Poligono	Poligono		È necessario cliccare nell'ordine sui punti che rappresentano i vertici, terminando con la selezione del primo vertice da cui si è partiti, per chiudere il poligono. Cap. 3 Dopo aver costruito un poligono, nella Vista Algebra compare l'area del poligono con il nome *poli1*. Le aree di successivi poligoni costruiti verranno indicate con *poli2*, *poli3*, …
	Poligono regolare		Il poligono viene costruito a partire da un lato, indicando il numero dei lati.
6. Strumenti Circonferenza e Arco	Circonferenza - dati il centro e un punto		Non è necessario aver determinato prima centro e punto.
	Circonferenza - dati centro e raggio		Il raggio può essere un numero, uno slider o la misura di un altro segmento.
	Compasso		Dopo aver selezionato la misura da riportare, compare una circonferenza: va trascinata fino a che il centro coincide con il punto da cui si vuole riportare la misura.
	Circonferenza - per tre punti		
	Semicirconferenza- per due punti		
7. Strumenti Conica	Ellisse		
	Parabola		
8. Strumenti Misura	Angolo		Per ottenere la parte convessa dell'angolo è necessario prendere i punti in senso antiorario.
	Angolo di data misura		A partire da un segmento, è possibile scegliere se ruotarlo in senso orario o antiorario di un angolo dato. Per avere il disegno completo dell'angolo è necessario disegnare poi il segmento che ha come estremi il vertice ed il punto ottenuto dalla rotazione.

	Distanza o lunghezza		
	Area		Nella finestra di algebra compare automaticamente l'area quando si disegna un poligono. Questo strumento consente di trovare anche l'area di cerchio o ellisse.
	Pendenza		Fornisce la pendenza di una retta, eventualmente tangente ad una curva.
	Crea lista		Cap. 5 Operazioni su Foglio di calcolo. Cap. 6 Strumenti richiamabili da menu-Osservazione 2
9. Strumenti Trasformazione	Simmetria assiale		Cap. 3 Cap. 4
	Simmetria centrale		Cap. 3 Cap. 4
	Rotazione		
	Traslazione		Cap. 4
	Omotetia		Cap. 4
10.Strumenti Oggetti speciali	Inserisci testo		Cap.2 Osservazione 2
	Relazione tra due oggetti		Cap. 1 Cap. 3
11.Strumenti Oggetti azione	Slider		La creazione di uno slider può avvenire: - direttamente nella Vista Grafica attraverso lo strumento; - dalla Vista Algebra rendendo visibile (cliccare sul pallino associato) un parametro definito prima (ad es. a=1); - dall'elenco degli oggetti ausiliari della Vista Algebra, avendo dati inseriti nel foglio di Calcolo, rendendo visibile un dato (ad es. A1);

			- inserendo il comando Slider nella barra di inserimento secondo la sintassi che viene automaticamente richiamata. Cap.5 Operazioni su Foglio di calcolo. Cap. 6 Cap. 7 Osservazione 1.
	Casella di controllo per mostrare/ nascondere oggetti		Cap. 3 Cap. 5 Operazioni nella Vista Algebra.
12.Strumenti Generali	Muovi la Vista Grafica		Sposta il foglio della Vista Grafica sullo schermo.
	Zoom avanti		Lo zoom può essere gestito anche cliccando con il tasto destro nella Vista Grafica.
	Zoom indietro		Lo zoom può essere gestito anche cliccando con il tasto destro nella Vista Grafica.
	Mostra / Nascondi oggetto		Cap. 3 Cap. 5 Operazioni nella Vista Algebra.
	Mostra / Nascondi etichetta		Cap. 1 Proprietà degli oggetti Cap. 5
	Copia stile visuale		Consente di applicare il colore, lo stile, ecc. di un oggetto su un altro. Cap. 5

Comandi[2]

I comandi possono essere inseriti nella barra di inserimento (in genere in basso) o nel Foglio di calcolo. Una volta dato l'Invio, essi compaiono nella Vista di algebra, come oggetti dipendenti/ indipendenti ovvero ausiliari se inseriti nel Foglio di calcolo.

L'elenco delle categorie dei comandi, e quindi di tutti i comandi della singola categoria, è richiamabile dal simbolo ◀ in basso a destra. Cliccando su uno di essi, compare in basso una selezione che ne evidenzia la sintassi. Premendo su *Incolla*, automaticamente il comando viene inserito nella Barra di inserimento. A questo punto è possibile inserire (senza cancellare) le espressioni necessarie nelle parti evidenziate, spostandosi da una all'altra con il tasto Tab (tabulazione).

Bisogna tenere presente inoltre che tutti gli strumenti prima analizzati non sono altro che comandi sintetizzati, per cui, in corrispondenza di ciascuna icona, sono disponibili anche i rispettivi comandi.

[2] http://wiki.geogebra.org/it/Comandi

Algebra	moltiplicazione	Cap. 4 Osservazione 3
Funzioni e analisi	Se	Cap. 6 Comandi con inserimenti nella barra apposita
Geometria	Punto Vettore	Cap. 4 Comandi con inserimento nella barra apposita. Cap. 4 Osservazione 2. Cap. 4 Comandi con inserimento nella barra apposita.
Foglio di Calcolo		
Testo	Testo pedice	Cap. 2 Osservazione 2 Cap. 6 Comandi GeoGebra con inserimento nella barra apposita.
Vettori e matrici	vettore	Cap. 4 Barra inserimento
Torna indietro/Ripristina		Cap. 1 Strumenti richiamabili da menu

Proprietà degli oggetti[3]

Ogni oggetto ha alcune proprietà specifiche (definizione, dimensione, colore, visibilità, posizione, …) che possono essere modificate richiamando una Finestra di dialogo.

L’icona  è quella che indica la possibilità di accedere a tale finestra. Vi si può accedere cliccando:

- con il tasto destro su un oggetto;
- sull’icona a destra in alto, al fondo della Barra degli strumenti;
- sul *Menu Modifica*.

Attivando la Finestra di dialogo *Proprietà*, appare la lista di tutti gli oggetti, organizzati per tipo (punti, rette, funzioni, poligoni, …) per cui si possono modificare più oggetti, contemporaneamente o in sequenza senza uscire dalla finestra.

Oggetti liberi, dipendenti e ausiliari	Vista Algebra	Caratteristiche degli oggetti, che ne individuano tra l’altro i vincoli di libertà. Gli oggetti ausiliari sono in genere quelli generati nel Foglio di calcolo. Cap. 1 Osservazione 2. Cap.5 Operazioni nella Vista Algebra.
Assegnare un nome agli oggetti	Rinomina	Se non viene indicato in un comando, GeoGebra genera autonomamente il nome degli oggetti. È però possibile cambiare il nome. Cap. 1 Proprietà degli oggetti.

[3] http://wiki.geogebra.org/it/Finestra_di_dialogo_Propriet%C3%A0

Stile		Cap. 3 Menu
Etichette e legende	Mostra Elimina etichettatura nuovi oggetti Nascondi etichetta Mostra Legenda Mostra Valore	Cap. 1 Proprietà degli oggetti. Cap. 2 Proprietà degli oggetti. Cap. 6 Proprietà degli oggetti. Cap. 7 Proprietà degli oggetti. Cap. 7 Osservazione 2 Cap. 7 Osservazione 2
Colore		Cap. 1 Proprietà degli oggetti. Cap. 2 Proprietà degli oggetti. Cap. 3 Menu
Animazione	Animazione attiva/ disattiva	In presenza di uno slider è possibile avviare l'animazione in modo automatico (pulsante destro del mouse sullo slider). Viene visualizzato il pulsante nella parte inferiore sinistra della Vista Grafica, che consente di interrompere l'animazione. Il pulsante viene sostituito da che ne consente il riavvio.
Rinominare oggetti	Rinomina	Cap. 1 Proprietà degli oggetti. Cap. 2 Proprietà degli oggetti. Cap. 3 Menu.
Tracciamento	Traccia attiva/ disattiva	La traccia è un segno grafico che viene lasciato da un oggetto in movimento. Essa ha però la caratteristica di essere temporanea: non viene salvata con il file, si cancella appena si modificano le proprietà della Vista grafica. Può anche essere eliminata con Ctrl+F. Cap. 1 Proprietà degli oggetti. Cap. 2 Proprietà degli oggetti. Cap. 4 Proprietà degli oggetti.
Mostra/nascondi oggetti	Mostra oggetto Condizione per mostrare l'oggetto	Cap. 2 Proprietà degli oggetti. Cap. 3 Nella Vista Algebra è possibile mostrare/nascondere un oggetto selezionando/ deselezionando il pallino vicino all'oggetto. Cap. 2 Osservazione 3. Cap. 3 Menu.
Funzionalità avanzate	Visibilità condizionata degli oggetti	Cap. 2 Osservazione 3. Cap. 3 Menu.

Viste[4]

GeoGebra possiede tre ambienti, chiamati *Viste*, interconnessi tra loro nel senso che qualsiasi oggetto definito in un ambiente viene automaticamente acquisito dall'altro ed in esso è dunque trattabile. Esse sono:

- Vista Algebra
- Vista Grafica (con due finestre distinte)
- Vista Foglio di calcolo

Possono crearsi diversi abbinamenti di visualizzazione: una sola di esse, in coppia, tre viste, …

Dalla versione 4.2 è disponibile anche una Vista CAS per il calcolo simbolico, che risulta però solo parzialmente integrabile con le altre.

Ogni Vista dispone di una *Barra di stile* propria, che consente di intervenire sugli oggetti nell'ambiente specifico.

La possibilità di avere uno stesso oggetto nelle tre Viste è particolarmente utile perché consente di vedere lo stesso sotto diversi registri: numerico, simbolico, grafico.

Vista Algebra	Menu ▶	
	Ordinare oggetti a seconda del tipo	Cap. 1 Viste – Osservazione 1.
	Visualizzare gli oggetti ausiliari	Cap. 5 Operazioni nella Vista algebra
	Nascondere/Visualizzare oggetti	Cap. 5 Operazioni nella Vista algebra
Vista Grafica	Menu ▶	 
	Attiva/disattiva assi e griglia	Cap. 1 Viste
	Modifica Colore e Stile degli oggetti	Cap. 1 Proprietà degli oggetti - Viste
Vista Foglio di calcolo	Casella associata ad uno slider	Cap. 5 Operazioni sul Foglio di calcolo
	Copia relativo	Cap. 5 Operazioni sul Foglio di calcolo

Menu Visualizza

Protocollo di costruzione	Menu Visualizza	Cap. 2 Osservazione 1. Cap. 3
Barra di inserimento	Menu Visualizza	Cap. 3

[4] http://wiki.geogebra.org/it/Viste

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education.* 34(3); 66-72.

Arzarello, F., Ferrara, F. & Robutti, O.(2012). Mathematical modeling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications*, vol. 31, 20-30.

Bartolini Bussi, M., Boni, M., Ferri, M. (1995). *Costruzione sociale del sapere matematico: discussione matematica e rappresentazione dello spazio*. Modena: Centro Documentazione Educativa.

Chiarugi, G. Fracassina, F. Furinghetti e D. Paola *Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe* reperibile all'indirizzo internet http://www.matematica.it/paola/Parametri,%20variabili%20e%20altro%20IMSI.pdf

DI.FI.MA. piattaforma per la DIdattica della Fisica e della Matematica, http://difima.i-learn.unito.it/

Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts, *Educational studies in mathematics*, 24,139-162.

GeoGebra, sito: http://www.geogebra.org/cms/

GeoGebra, manuale di guida all'uso: http://www.geogebra.org/book/intro-it.zip

GeoGebra, filmati per istruzioni all'uso: http://www.youtube.com/user/srmathmum

GeoGebra Institute of Turin, http://institute.geogebra.org/it/

Hegedus, S.J.& Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education.* 41 (4), 399-412.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2009). Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), 135-146.

IGI *International GeoGebra Institute,* http://www.geogebra.org/igi/

INVALSI, Prove, Guida alla lettura, Quaderni http://www.invalsi.it

Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in pupils' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles& O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1-21.

Laborde, C., Hollebrands, K., Kynigos, C. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez& P. Boero (Eds.) *Handbook on Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 275-304.

La Casa degli Insegnanti, http://www.lacasadegliinsegnanti.it/PORTALE/

La Casa degli Insegnanti, http://lacasadegliinsegnanti.wizshelf.org/, piattaforma, modulo aperto agli ospiti GeoGebra Open.

Maccario, D. (2006). *Insegnare per competenze.* Torino: SEI.

m@t.abel, attività: http://risorsedocentipon.indire.it

Marrades, R.&Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in adynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Noss, R., Healy, L. &Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), 203-233.

Olivero, F. & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. Internat*ional Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. Volume 12, Number 2; p. 135-156.

Olivero, F., Paola, D.& Robutti, O. (2001). Approaching theoretical thinking with in a dynamic geometry environment. *L'educazione matematica*, 3(3), 127-148.

Robutti (2013). The GeoGebraInstituteof Torino, Italy: Research, TeachingExperiments, and TeacherEducation. In: P. M. Pumilia-Gnarini, E.Favaron, E. Pacetti, J. Bishop & L. Guerra (Eds.) *Handbook of Research on DidacticStrategies and Technologies for Education: IncorporatingAdvancements*, Hershey: Information Science Reference, vol. 1, 492-502.

Robutti O. & Sargenti A. (2012). GeoGebra Institute of Torino: ricerca, formazione docenti, sperimentazioni. In: M. Mosca &O. Robutti (Eds.) *Atti del V Convegno Nazionale di DIdattica della FIsica e della MAtematica. DI.FI.MA. 2011. Il curriculum di matematica e di fisica nella scuola del III millennio: infanzia, primaria, secondaria di primo e secondo grado.* Torino, 5-7 ottobre 2011, 441-450, Torino: Kim Williams Books.

UMI (2001-2003-2004). *La matematica per il cittadino*. Reperibili presso il sito http://www.umi-ciim.it/in_italia--28.html

UMI percorsi – indicazioni per la realizzazione di percorsi per il nuovo biennio della secondaria superiore: www.umi-ciim.it/costruzione_di_percorsi_didattici_di_matematica_coerenti_con_le_indicazioni_della_riforma--85.html

V. Villani (2003). *Cominciamo da zero*, Bologna: Pitagora Editrice

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*, Cambridge: Cambridge University Press.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica.* Milano: Springer.

INDICE

Presentazione *GeoGebra nell'insegnamento della matematica* 3
1. Il software GeoGebra 3
2. GeoGebra nella ricerca e nell'insegnamento della matematica 4
3. L'attività del GeoGebra Institute di Torino 5
4. Questo volume 6

Introduzione *Esplorazioni matematiche con GeoGebra* 7
1. I materiali 7
2. Il software GeoGebra nella didattica della matematica 9
3. Un occhio alla metodologia e al progetto m@t.abel 10

Capitolo 1 *Rette, segmenti, angoli: disegnare per comprendere* 13
Introduzione 13
Riferimenti alle indicazioni ministeriali 13
Uno sguardo a GeoGebra 14
1. Punti e rette nel piano 15
2. Trasporto rigido di segmenti e angoli 19
3. Costruzione di una figura complessa 21
4. Luoghi di punti nel piano: una prima costruzione 24

Capitolo 2 *Triangoli: una rappresentazione che favorisce la scoperta di proprietà geometriche* 27
Introduzione 27
Riferimenti alle indicazioni ministeriali 27
Uno sguardo a GeoGebra 28
1. Il triangolo che inganna 30
2. Triangoli isosceli 32
3. Triangoli e mediane 34
4. Triangoli rettangoli 38
5. L'isola Tondatonda 40
6. Ulteriori costruzioni con i triangoli 42
7. Criteri di congruenza dei triangoli 43

Capitolo 3 *Costruzioni dinamiche e didattica della geometria* 55
Introduzione 55
Riferimenti alle indicazioni ministeriali 55
Uno sguardo a GeoGebra 56

1. Punti notevoli di un triangolo 57
2. Alla scoperta dei quadrilateri 63

Capitolo 4 *Dai numeri ai punti del piano cartesiano* 71
Introduzione 71
Riferimenti alle indicazioni ministeriali 71
Uno sguardo a GeoGebra 72
1. Assi cartesiani, punti e coordinate 73
2. Punti, luoghi ed equazioni 80

Capitolo 5 *Proporzionalità diretta ed inversa* 85
Introduzione 85
Riferimenti alle indicazioni ministeriali 85
Uno sguardo a GeoGebra 86
1. Proporzionalità diretta 87
2. Proporzionalità inversa 91
3. Dipendenza lineare 95

Capitolo 6 *Come varia un fenomeno: modelli di funzioni Funzioni lineari e quadratiche* 99
Introduzione 99
Riferimenti alle indicazioni ministeriali 99
Uno sguardo a GeoGebra 100
1. Il modello lineare 101
2. Il modello quadratico 108

Capitolo 7 *Variabili e parametri: il gioco degli slider* 119
Introduzione 119
Riferimenti alle indicazioni ministeriali 119
Uno sguardo a GeoGebra 120
1. Variabili e parametri 121
2. Quadrati e quadrati 124
3. I fasci di circonferenze 129
4. Vertici di parabole 132
5. Disequazioni di secondo grado 136
6. E nell'Esame di Stato? 138

Indice dei temi matematici 141

Indice di GeoGebra 143
Barra degli strumenti 143
Comandi 147

Proprietà degli oggetti 148
Viste 149
Menu Visualizza 150

Bibliografia-sitografia 151

Indice 153